

Hélio- et astérosismologie

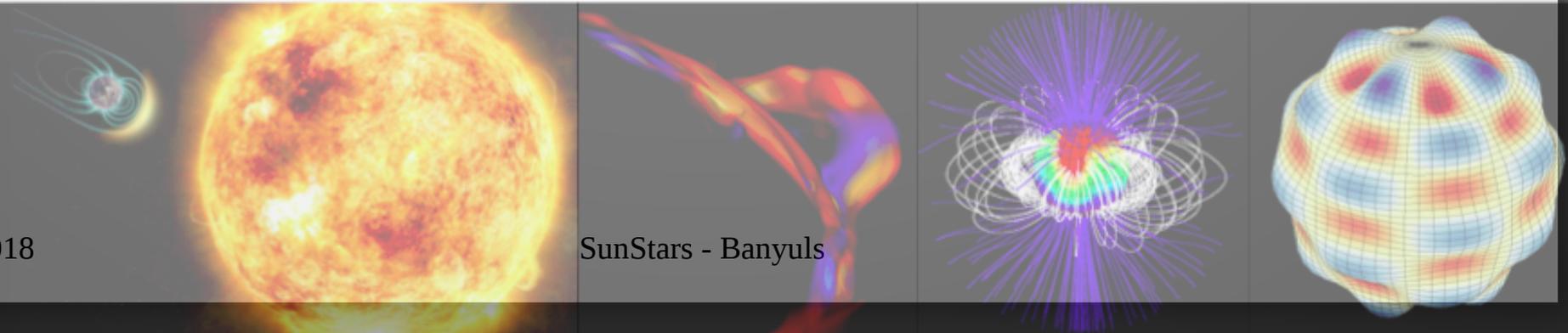
Principes physiques

Jérôme Ballot



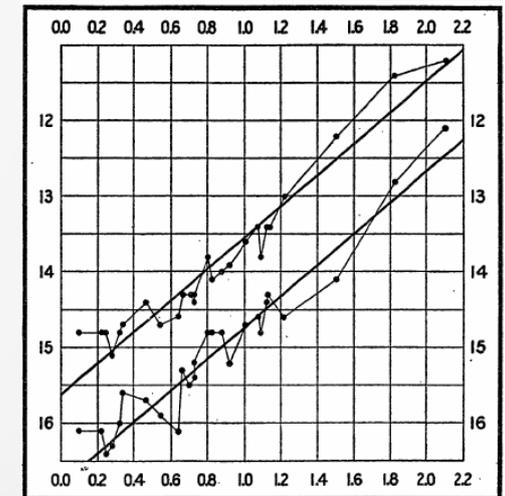
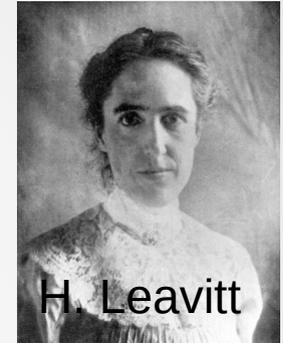
15/05/2018

SunStars - Banyuls



Oscillations stellaires

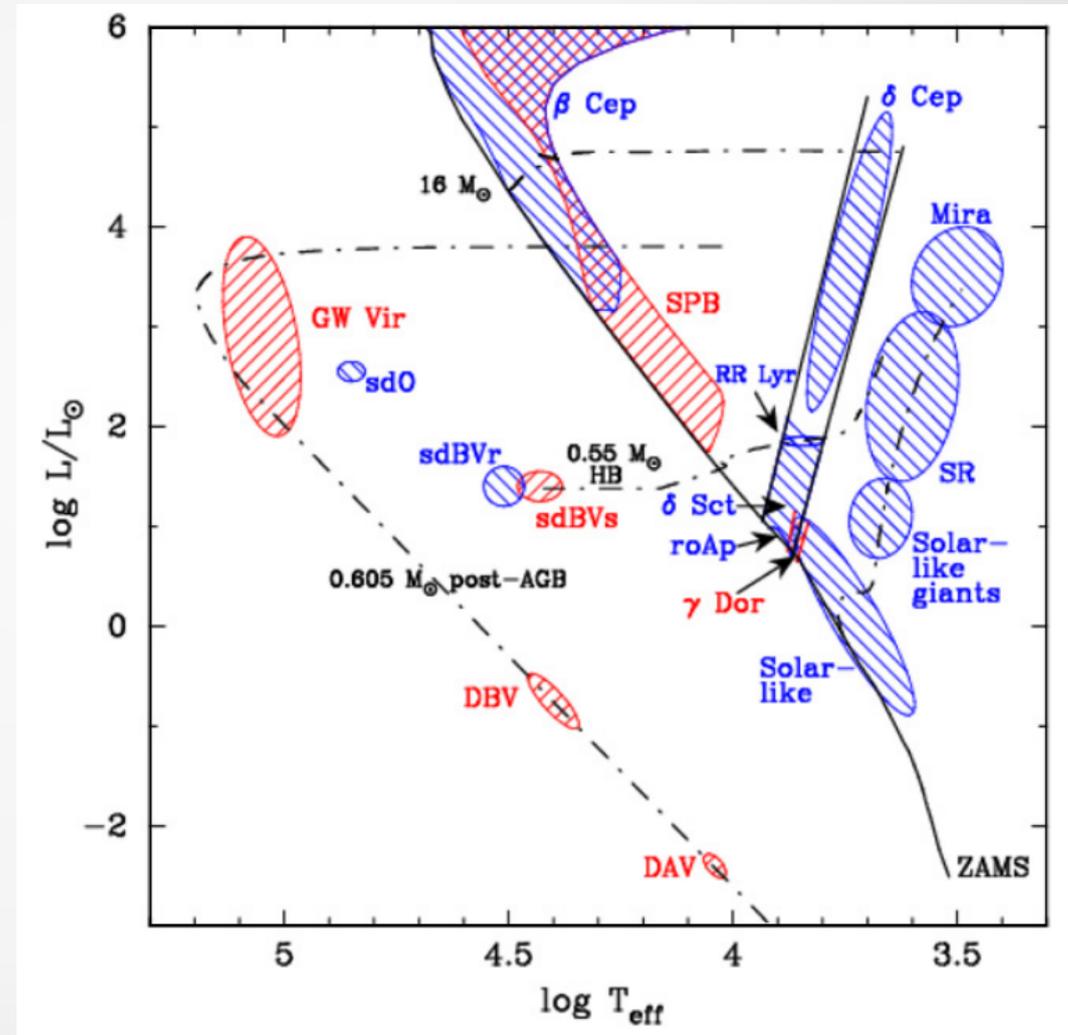
- Etoiles variables
 - Traces écrites antiques (Egypte ~1200 av JC)
 - Etoiles variables \neq pulsantes
- Les étoiles oscillent
 - Céphéides ; relation P-L (Leavitt 1912)
 - Soleil ; oscillations de 5' (Leighton et al 1962)
- Hélio et astérosismologie :
 - étude des oscillations solaires et stellaires
 - Comprendre la structure et la dynamique interne



Log P - Mag
Leavitt 1912

Oscillations à travers le diagramme HR

- La plupart des étoiles oscillent
 - Nature différentes des oscillations
modes g / **modes p**
 - Origine des oscillations variée



But de ce cours

- Centré sur les étoiles de type solaire
 - Etoiles de séquence principale avec une enveloppe convective
 - Incursion chez les étoiles un peu plus évoluées
 - Incursion chez les étoiles un peu plus massives
- Motivation : oscillations de faibles amplitudes mais simples à comprendre et à interpréter !
- Sismologie globale
 - Pas d'héliosismologie locale

Plan

- Oscillations adiabatiques d'une étoile purement sphérique
- Effets de surface
- Glitches
- Origine des oscillations de type solaire
- Lois d'échelle
- Effets de la Rotation

Cours/Monographies :

Unno et al 1989

Christensen-Dalsgaard 2003 (CD03)

Aerts et al 2010

Mosser et al 2014

Équations d'oscillations

- Hypothèses :
 - Etoiles à l'équilibre, à symétrie purement sphérique
 $t_{\text{dyn}} \ll t_{\text{evol}} (t_{\text{dyn}} = t_{\text{ff}} \sim \langle G\rho \rangle^{-1/2})$
 - Fluide parfait
 - **Oscillations adiabatiques**

- Equations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Cons. masse

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi$$

Cons. qdm

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

Gravité

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) \quad \text{où } c_s^2 = \frac{\Gamma_1 p}{\rho}$$

Energie

Équations d'oscillations

- Perturbations $f=f_0+f'$
- Linéarisation des équations

$$\begin{aligned}\rho' + \operatorname{div}(\rho_0 \delta \vec{r}) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \delta \vec{r}}{\partial t^2} &= -\vec{\nabla} p' - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi' - \rho' \vec{\nabla} \Phi_0 \\ \Delta \Phi' &= 4\pi G \rho' \\ p' + \delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} p_0 &= c_s^2 \left(\rho' + \delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}$$

- Recherche de solutions harmoniques en t , et projection sur une base adaptée de fonctions pour décrire la partie horizontale.

Harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

- Fonctions propres de l'opérateur Laplacien horizontal

$$-r^2 \Delta_{\perp} Y_{\ell}^m = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m$$

- Expressions: $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = c_{\ell, m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$

$$-\ell \leq m \leq \ell$$

Constante de normalisation

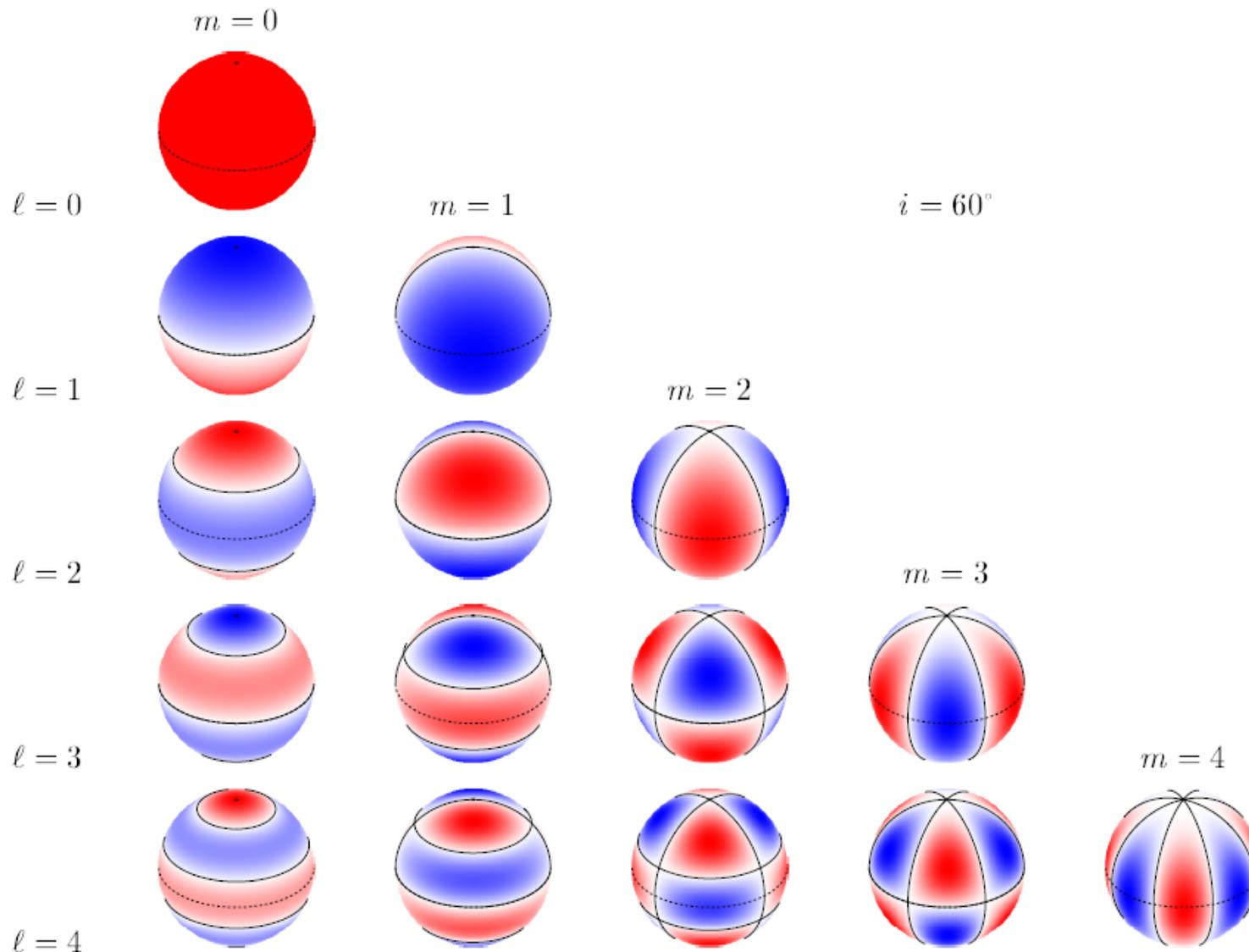
Fonctions de Legendre associées

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$$

Harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$



Equations des oscillations

- On recherche les solutions harmoniques en $t \propto e^{i\omega t}$
- On projette les équations sur la base des $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$
 - Comme la symétrie sphérique est conservée, équations de différent degrés ℓ sont découplées \rightarrow 1D éq. indépendantes en m . (\rightarrow dégénérescence en m)
- Pour chaque ℓ un problème du 4^e ordre

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c_s^2} \left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1 \right) p' + \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2} \Phi' \quad \delta \vec{r} = \xi_r \vec{e}_r + \vec{\xi}_h$$

$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} p' - \rho \frac{d\Phi'}{dr}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = 4\pi G \left(\frac{p'}{c_s^2} + \frac{\rho \xi_r}{g} N^2 \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi'$$

Perturbations $f'(r, \theta, \phi, t) = \boxed{f'(r)} Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega t}$

Dépendance hor.

$$\Delta_\perp f' + \underbrace{\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}_{k_h^2(r)} f' = 0$$

Equations des oscillations

Fréquence de Lamb

$$S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell + 1)c^2}{r^2}$$

Fréquence Brunt-Väisälä

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)$$

+ Conditions aux limites (régularités au centre, $\delta p=0$ à la surface ou atmosphère isotherme)

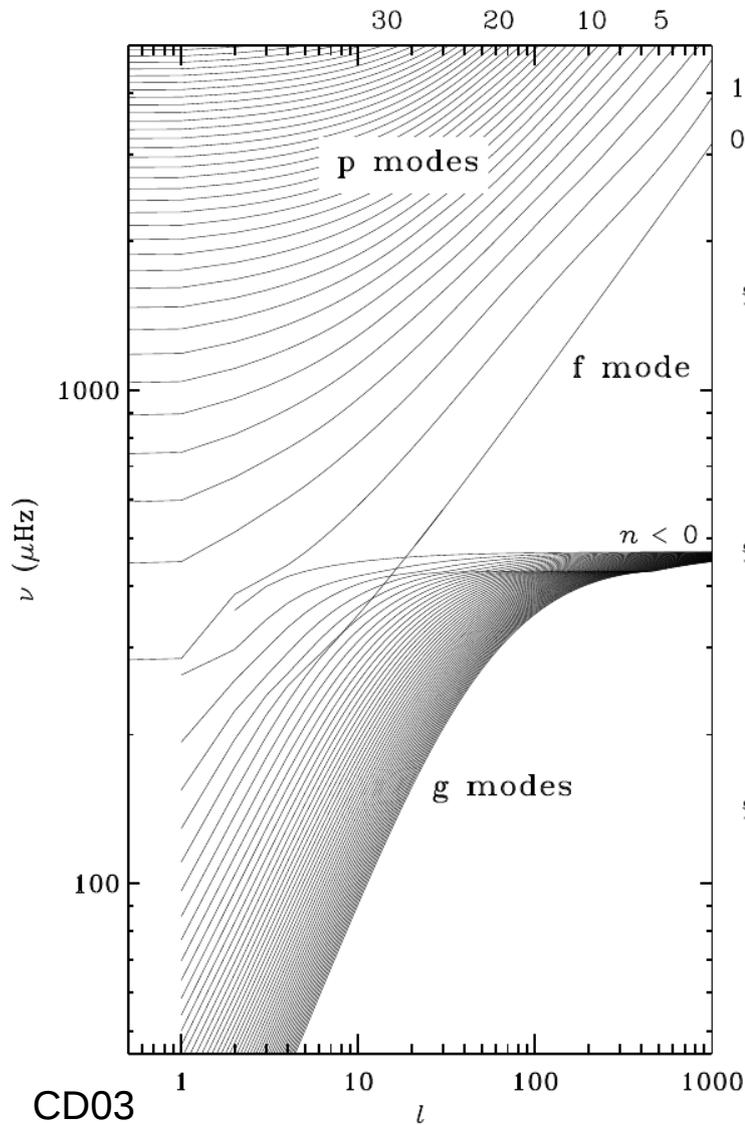
Spectre quantifié de solutions $\rightarrow (n, \ell)$

Modes propre de pulsation propre $\omega_{n\ell}$ ($\nu_{n\ell} = \omega_{n\ell} / (2\pi)$)

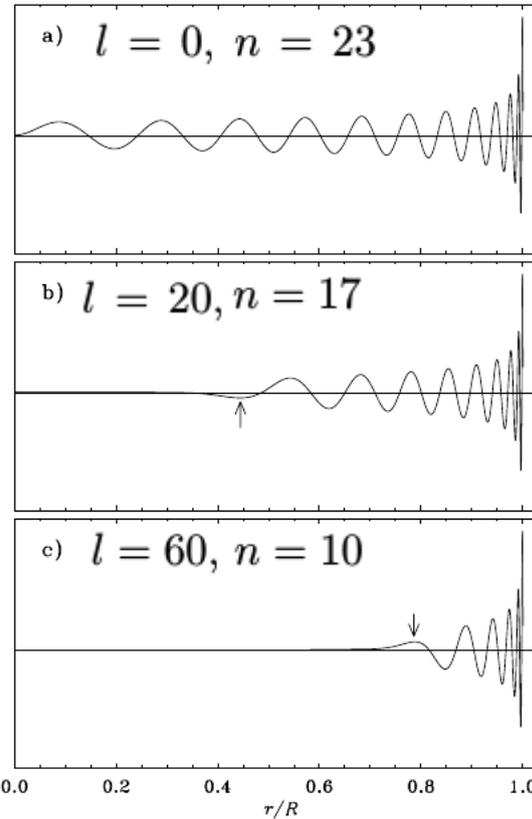
Note sur la forme 3D des solutions :

Modes sont stationnaires dans un plan méridien, progressives dans la direction azimutale : $e^{i(\omega t + m\phi)}$

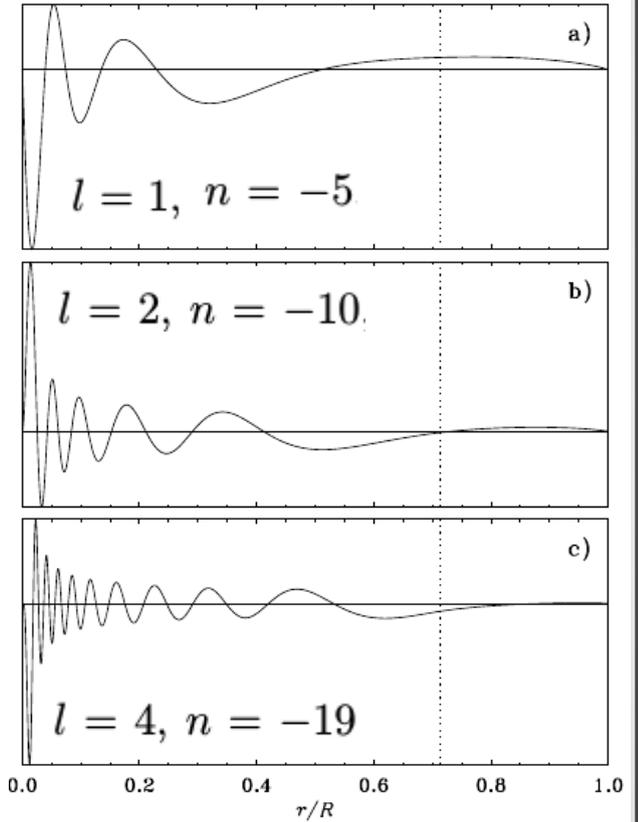
Application à un modèle du Soleil



Modes p



Modes g



CD03

Essayons de comprendre...

Approximation de Cowling (1941)

- Néglige φ' (OK si n ou ℓ sont « grands »)

– Système du 2^e ordre :

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left(\frac{2}{r} - \frac{g}{c_s^2} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c_s^2} \left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1 \right) p'$$
$$\frac{dp'}{dr} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r - \frac{g}{c_s^2} p'$$

- On considère que la structure varie lentement p/r à l'onde (OK sauf surface) → Eq. onde très simple :

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} + K(r) \xi_r = 0$$

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2} \right) \equiv k_r^2$$

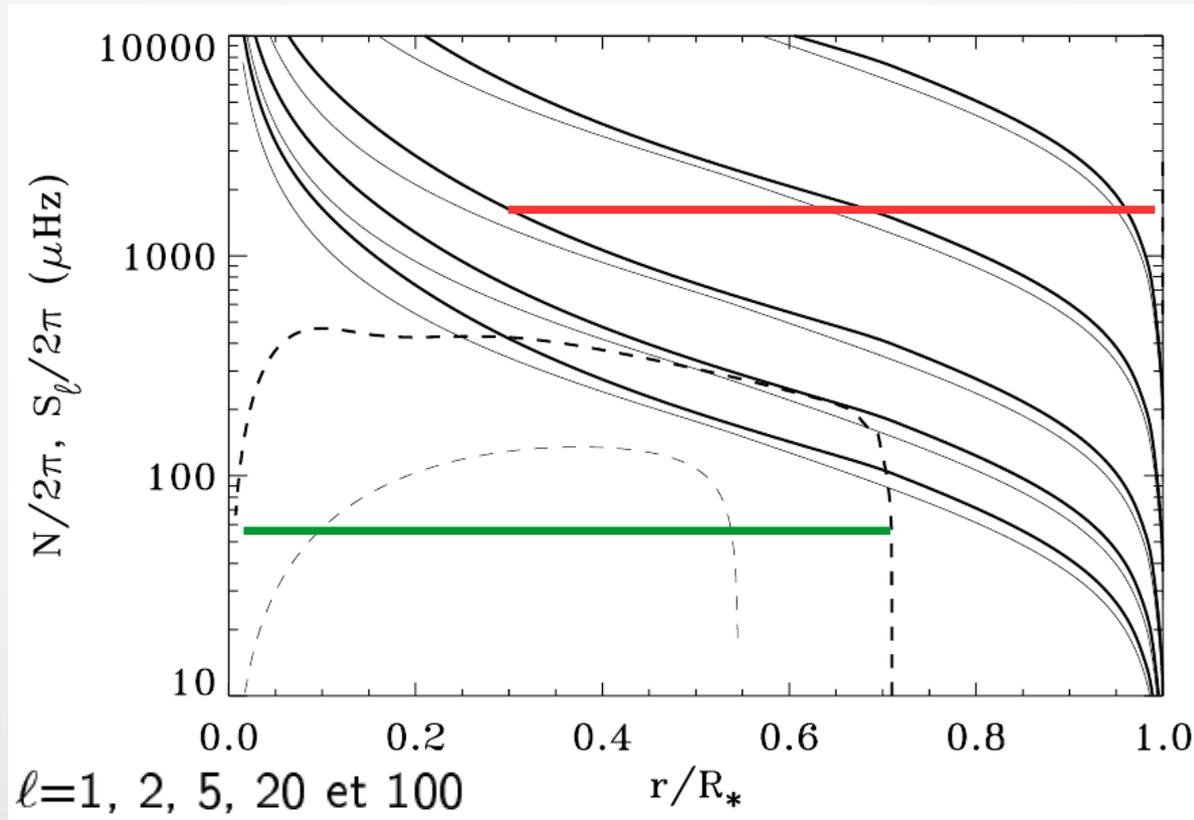
Propagation ssi $K(r) > 0$

On peut dériver une expression de K un peu plus complète avec un analyse WKB propre

Modes p et modes g

- **Modes p** si $\omega > S_\ell$ et $\omega > N$; **Modes g** si $\omega < S_\ell$ et $\omega < N$

Cavités et leur variation, gamme de fréquences



Modes p

- Analyse WKBJ (courtes longueurs d'ondes)
- Rayon acoustique (\sim optique géométrique)
 - Particule d'impulsion k ,
 - ω joue le rôle de l'énergie (conservée!)

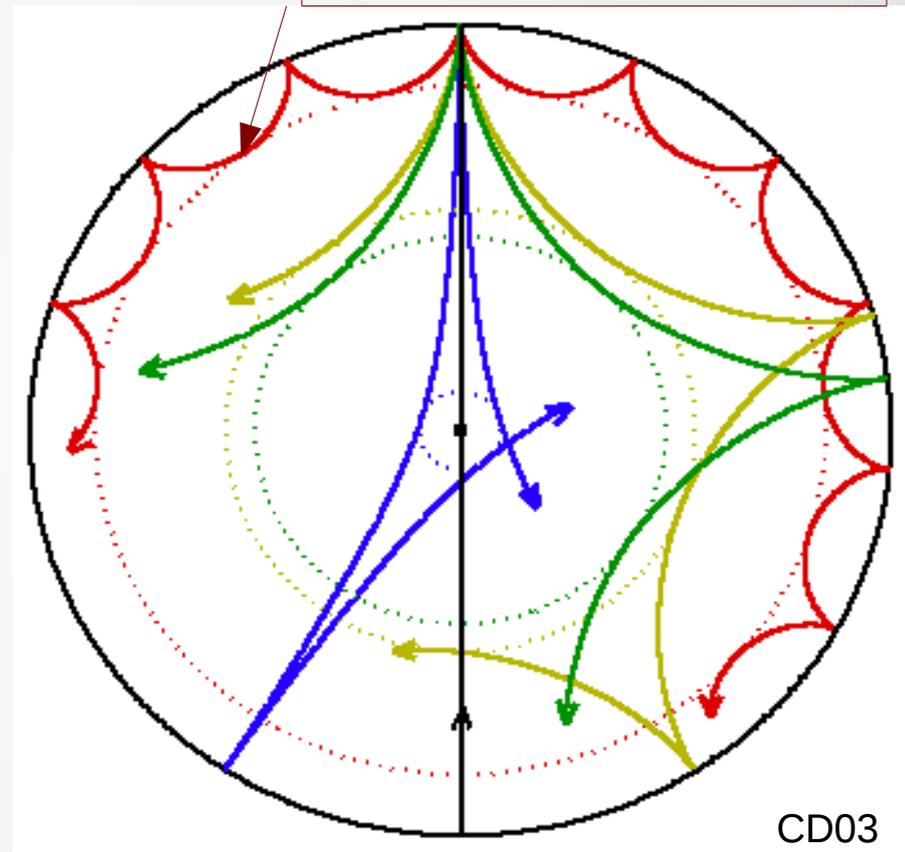
$$k_r^2 \approx \frac{1}{c^2} (\omega^2 - S_\ell^2)$$

$$k_h^2 = L/r^2$$

$$k^2 \equiv k_r^2 + k_h^2 = \omega^2/c^2$$

Point de retournement

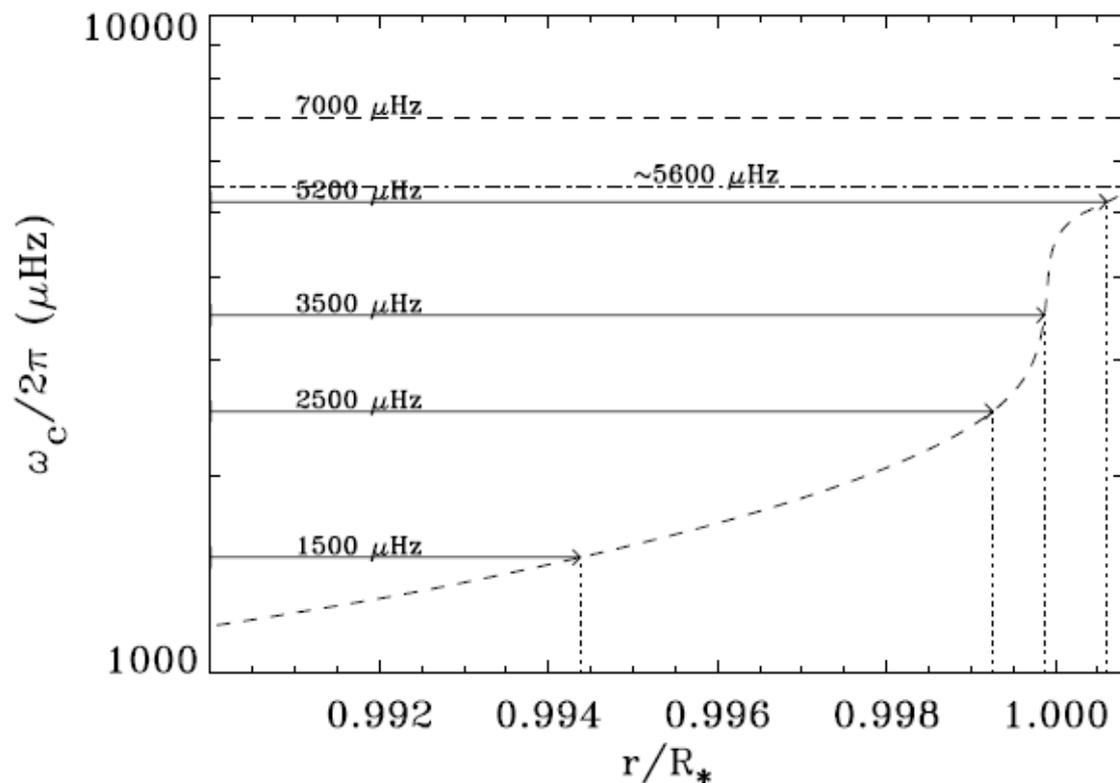
r_t where $\omega = S_\ell$



$$L^2 = \ell(\ell + 1) \approx (\ell + 1/2)^2$$

A la surface

- Existence d'une fréquence de coupure ω_c
 - Relation de dispersion $k^2 = (\omega^2 - \omega_c^2)/c^2$
 - Dans l'approximation isotherme $\omega_c = c/(2H_p)$



– Dépend de ω seule

– Il existe une fréquence maximale pour piéger les ondes

Voir Deubner & Gough (1984) pour une vision + complète

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + k_r^2 X = 0 \quad X = c_s^2 \rho^{1/2} \operatorname{div} \delta \vec{r}$$

$$k_r^2 = \frac{1}{c_s^2} \left[S_\ell^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) + \omega^2 - \omega_c^2 \right]$$

$$\omega_c^2 = \frac{c_s^2}{4H_p^2} \left(1 - 2 \frac{dH_p}{dr} \right)$$

Relation asymptotique des modes p

- Condition de quantification WKBJ

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

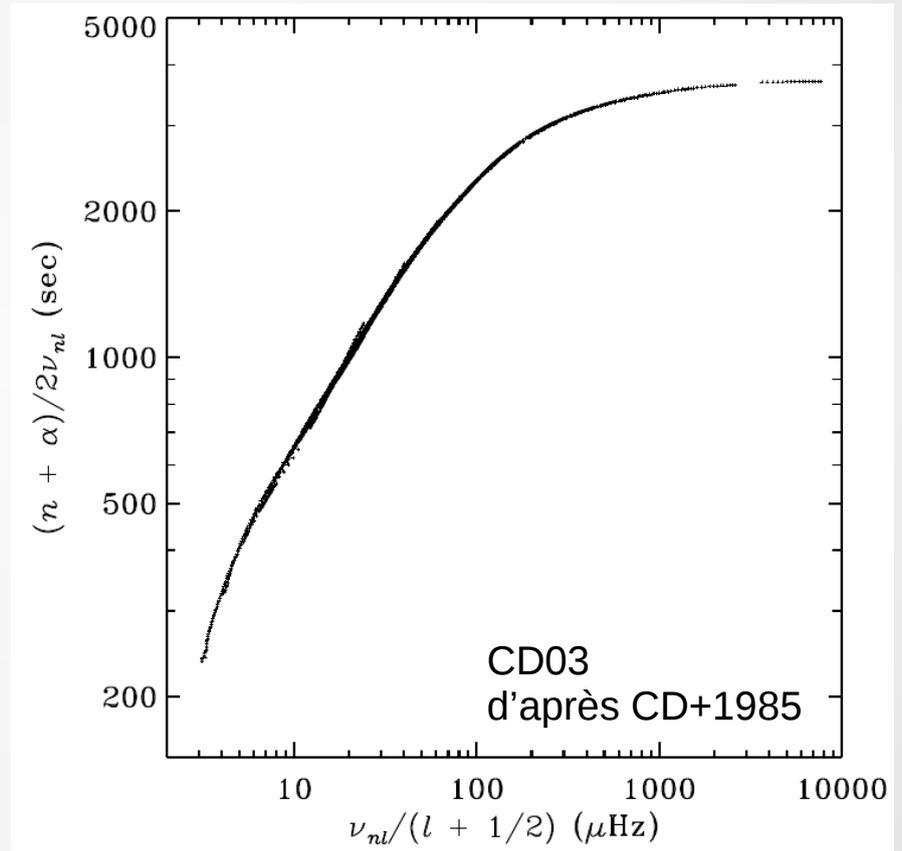
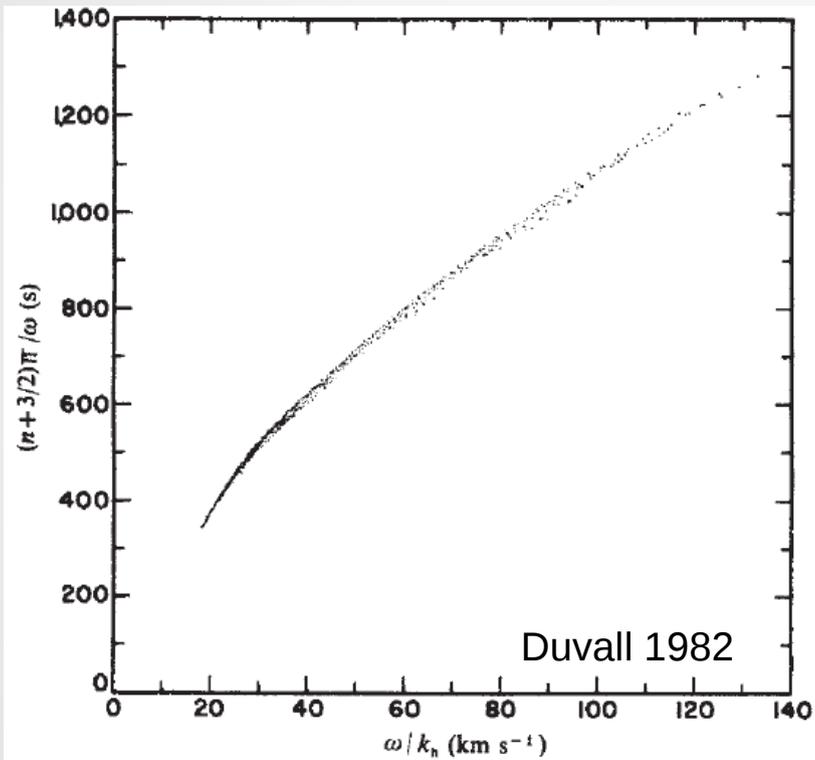
ce qui donne pour les modes g

$$\int_{r_t}^{r_{out}} \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{S_\ell^2}{\omega^2}\right)^{1/2} dr = (n + 1/2)\pi$$

qu'on peut exprimer comme la loi de Duvall (1982)

$$F\left(\frac{\omega}{L}\right) = \frac{n + \alpha(\omega)}{\omega} \pi \quad F(\omega) = \int_{r_t}^{R_*} \left(1 - \frac{c_s^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{r}{c_s}$$

Loi de Duvall observée dans le Soleil



Inversion de la loi de Duvall

- Loi de Duvall utile pour inverser le profil de vitesse du son
Il faut :

Un modèle de référence
proche de la réalité ET
avec le bon rayon

$\delta\omega$ les écarts en fréquence
entre théorie et observations
 δc les écarts de vitesse du son

$$S_{nl} \frac{\delta\omega_{nl}}{\omega_{nl}} \simeq \mathcal{H}_1 \left(\frac{\omega_{nl}}{L} \right) + \mathcal{H}_2(\omega_{nl}) ,$$

$$\mathcal{H}_1(\omega) = \int_{r_t}^R \left(1 - \frac{c^2}{r^2 \omega^2} \right)^{-1/2} \frac{\delta_r c}{c} \frac{dr}{c} ,$$

$$\mathcal{H}_2(\omega) = \frac{\pi}{\omega} \delta\alpha(\omega) .$$

- Possible pour le Soleil seulement
 - Rayon connu a priori, beaucoup de modes.

Développement asymptotique de fréquences (modes p)

- Au premier ordre (Tassoul 1980)

Rayon acoustique

$$\nu_{nl} = \Delta\nu_0 \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha(\nu) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\nu} \right) \quad \Delta\nu_0 = \frac{1}{2\tau_c} \quad \tau_c = \int_0^R \frac{dr}{c}$$

Grandre séparation asymptotique

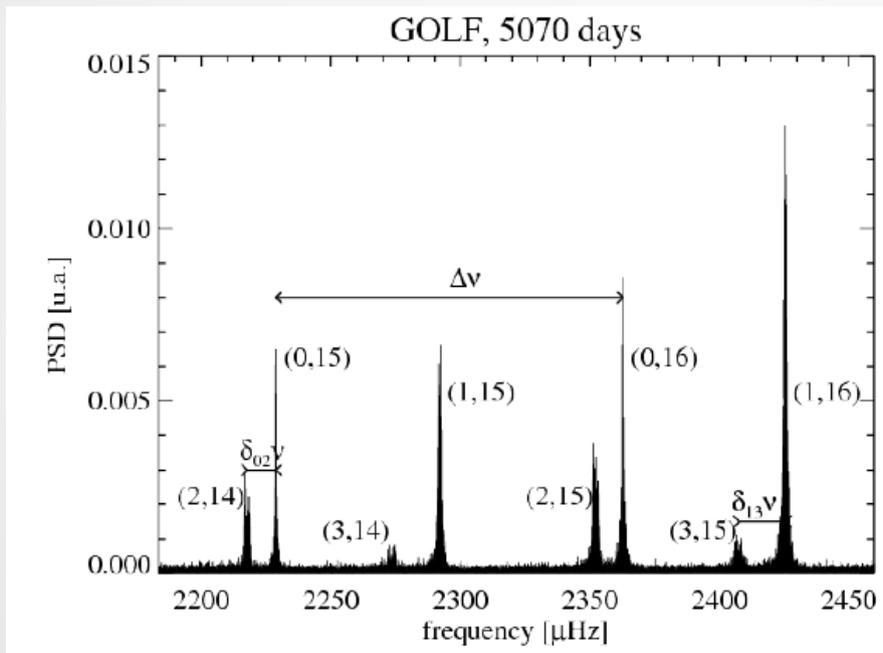
- Au second ordre (Vorontsov 1991, Lopes & Turck-Chièze 1994)

$$\nu_{nl} = \Delta\nu_0 \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha(\nu) \right) + \frac{\Delta\nu_0}{4\pi^2\nu_{nl}} (L^2 A + 2\psi) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\nu^2} \right)$$

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{c_s(R_*)}{R_*} - \int_0^{R_*} \frac{dc_s}{dr} \frac{dr}{r} \right)$$

Régularité du spectre

- Grande séparation $\Delta\nu_{n,l} = \nu_{n+1,l} - \nu_{n,l} \approx \Delta\nu_0$
- Petite séparation $\delta_{\ell,\ell+2}\nu_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,\ell+2}$



$$\delta_{\ell,\ell+2}\nu_{n,l} \approx \frac{(4\ell + 6)\Delta\nu}{4\pi^2\nu} \int_0^{R_*} \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r}$$

- Secondes différences $\delta_2\nu_{nl} = \nu_{n+1,l} + \nu_{n-1,l} - 2\nu_{nl} \approx 0$

Diagramme Echelle du Soleil

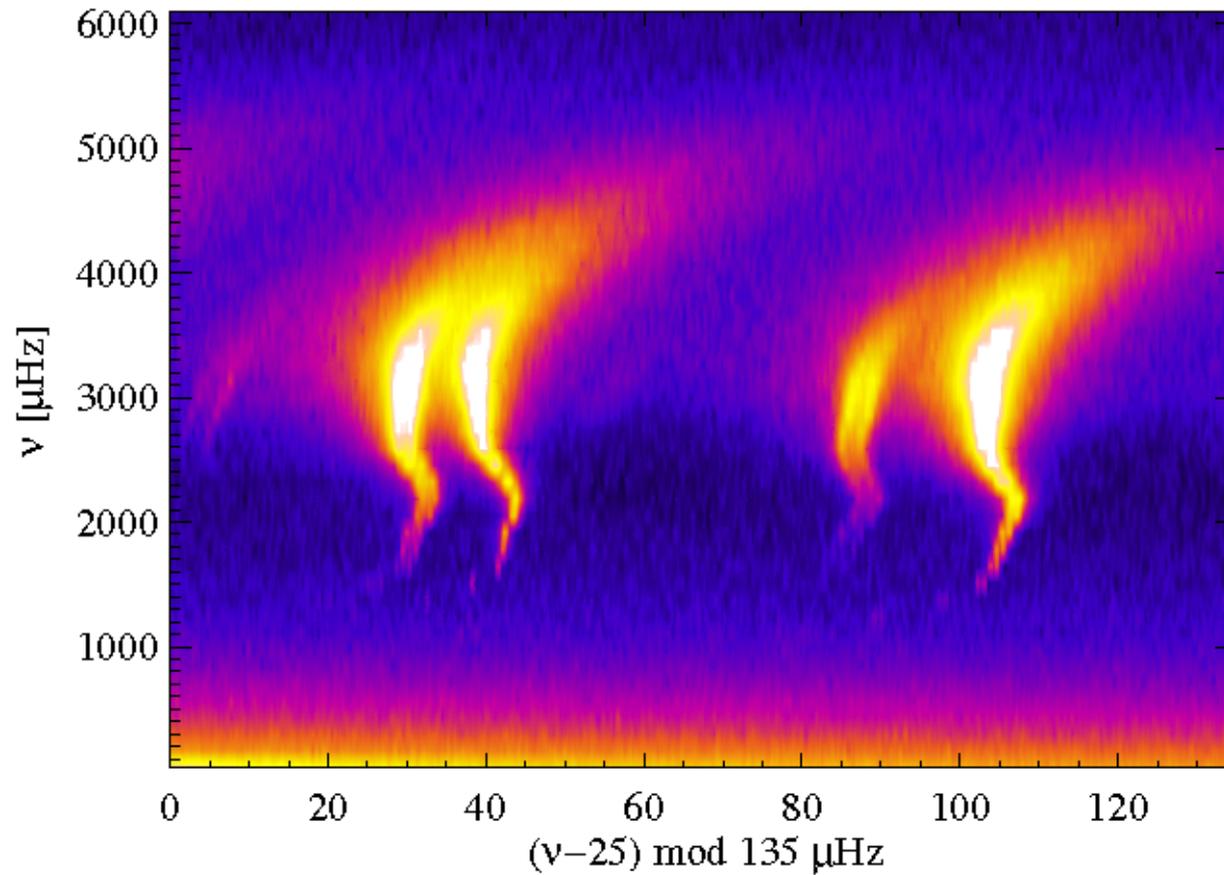
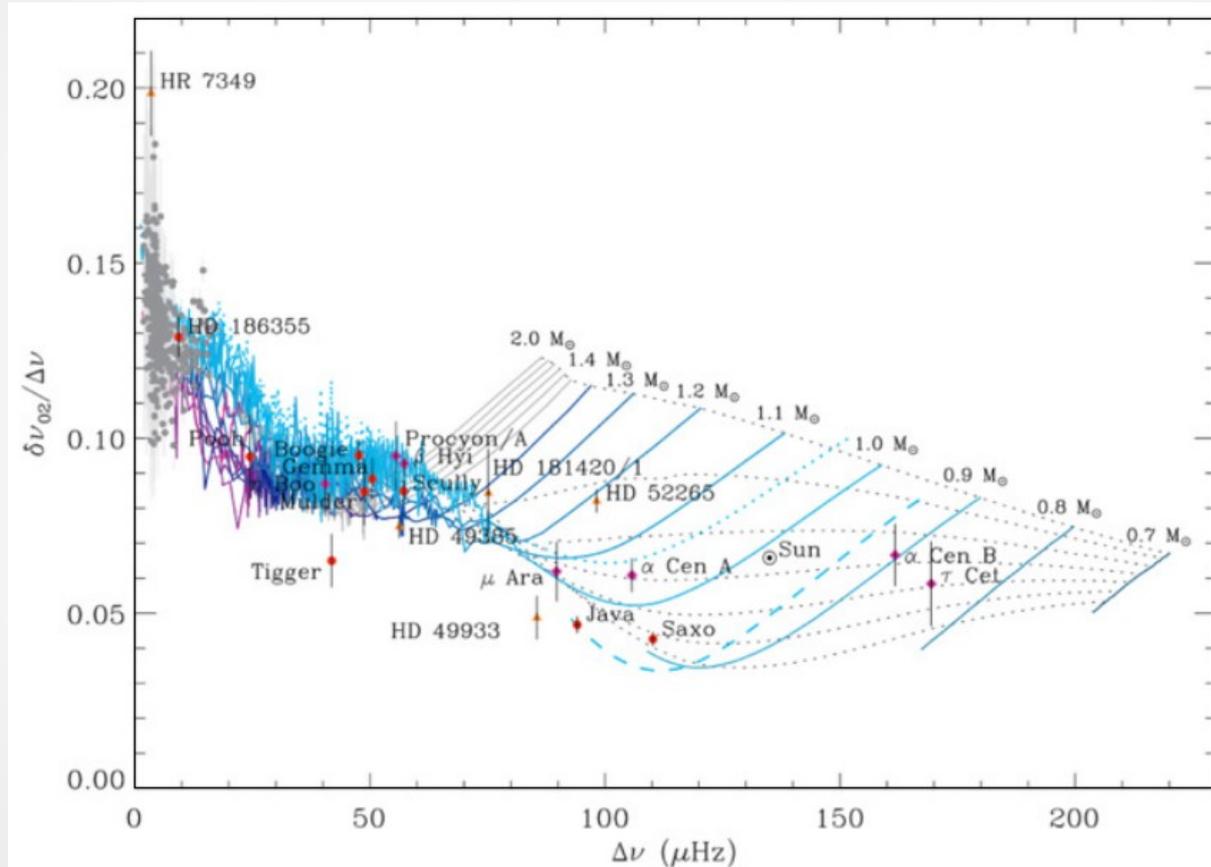
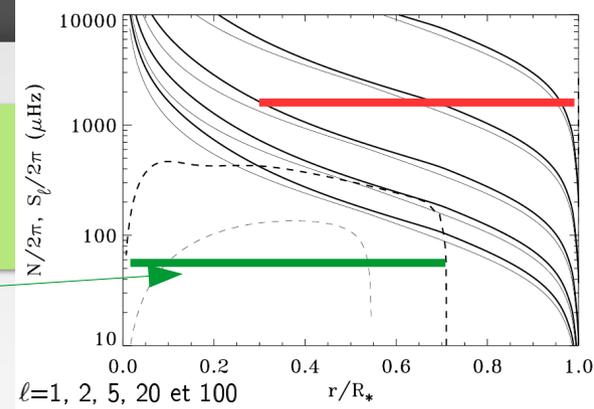


Diagramme CD



δ_{02}/Δ sensible à dc/dr au cœur, donc au stade évolutif

Relation asymptotique des modes g



- Quantification $\int_{r_1}^{r_2} k_r = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$

ce qui donne pour les modes g

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)^{1/2} dr = (n + 1/2)\pi$$

$$k_r^2 \approx \frac{L^2}{r^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)$$

Relation dispersion

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2}$$

- Développement asymptotique des fréquences

$$\omega = \frac{L \int_{r_1}^{r_2} N \frac{dr}{r}}{\pi(n + l/2 + \alpha_g)}$$

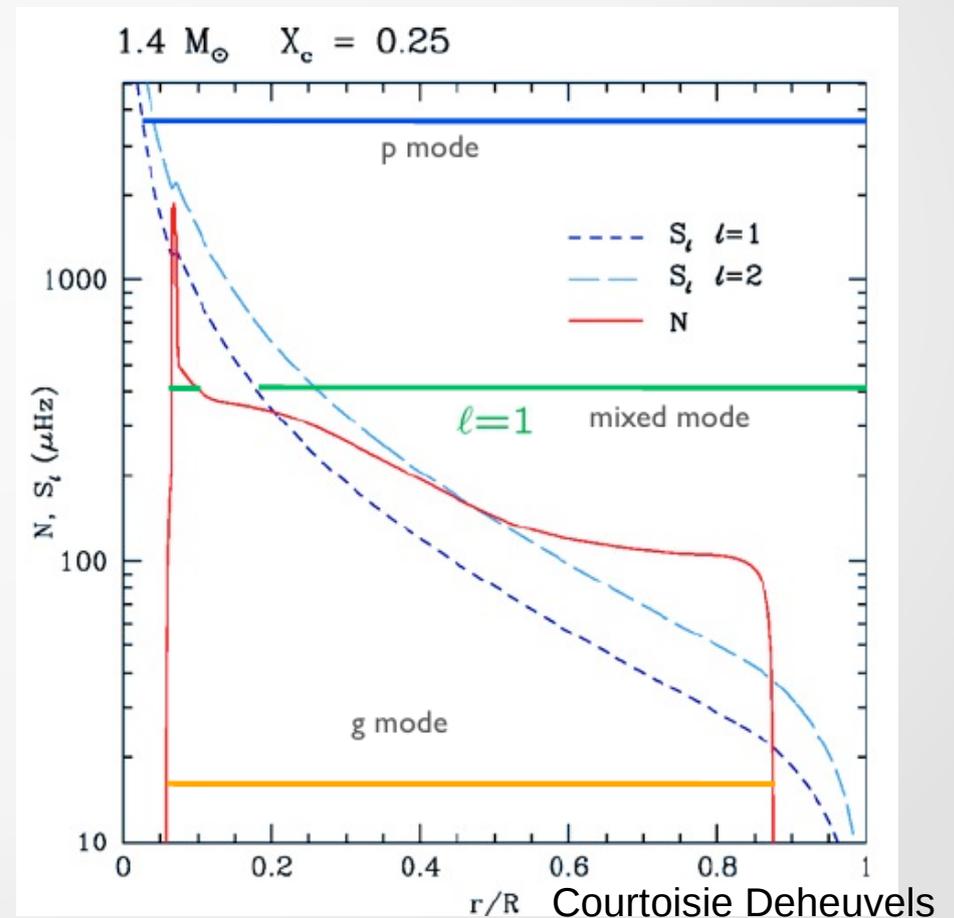
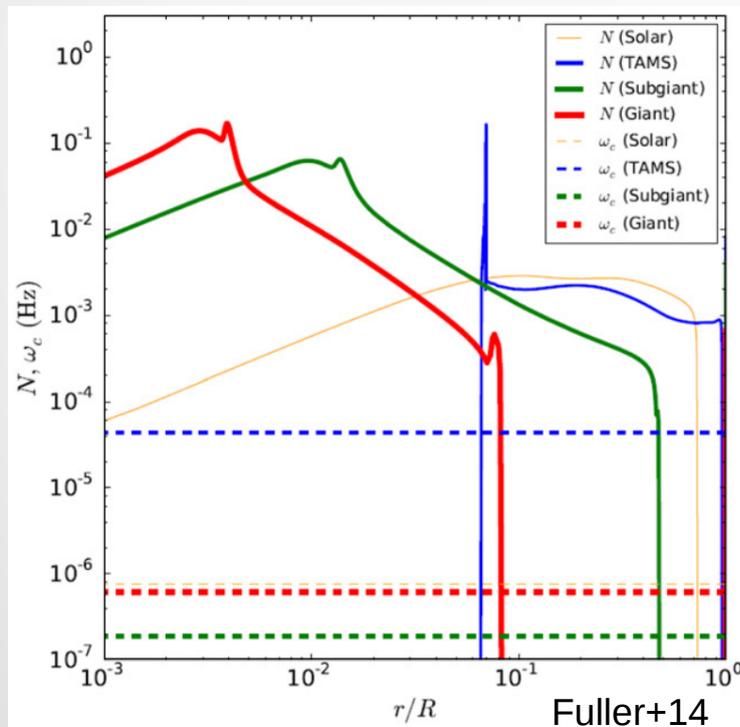
Pas de modes g radiaux !

- Espacement régulier en période

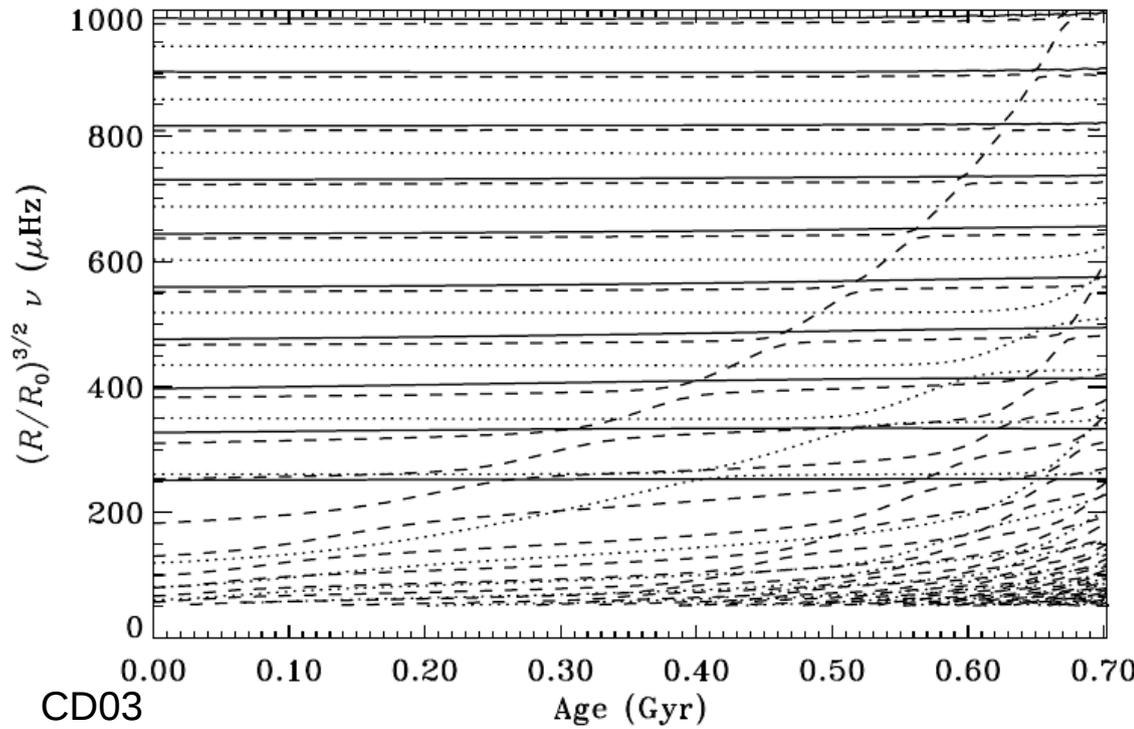
$$P_{n,l} = \frac{P_0}{L} (n + l/2 + \alpha_g) \text{ avec le rayon d'Archimède } P_0 = 2\pi^2 \left(\int \frac{N}{r} dr\right)^{-1}$$

Modes mixtes

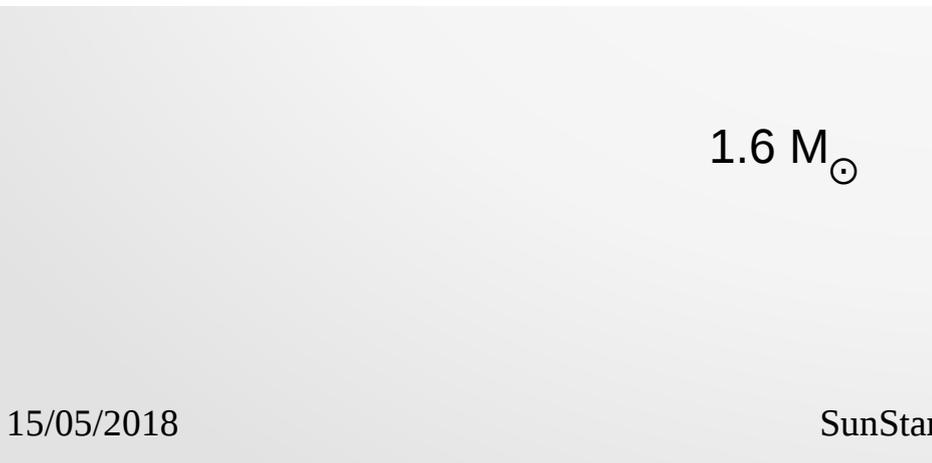
- Quid quand les fréquences des modes p et g ne sont similaires ? → apparition de modes mixtes
- Etoiles plus évoluées



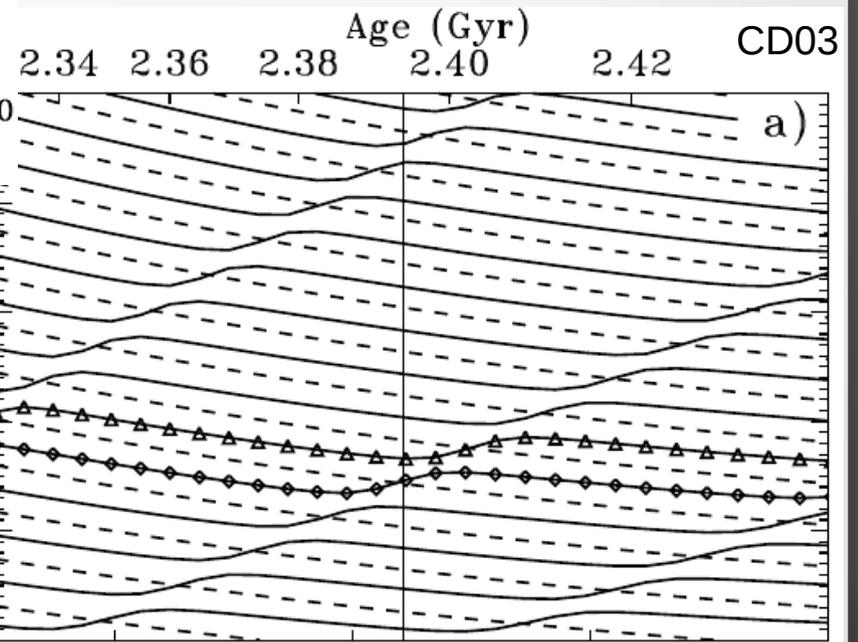
Croisements évités



$2.2 M_\odot$



$1.6 M_\odot$



Modes p, g ou mixtes

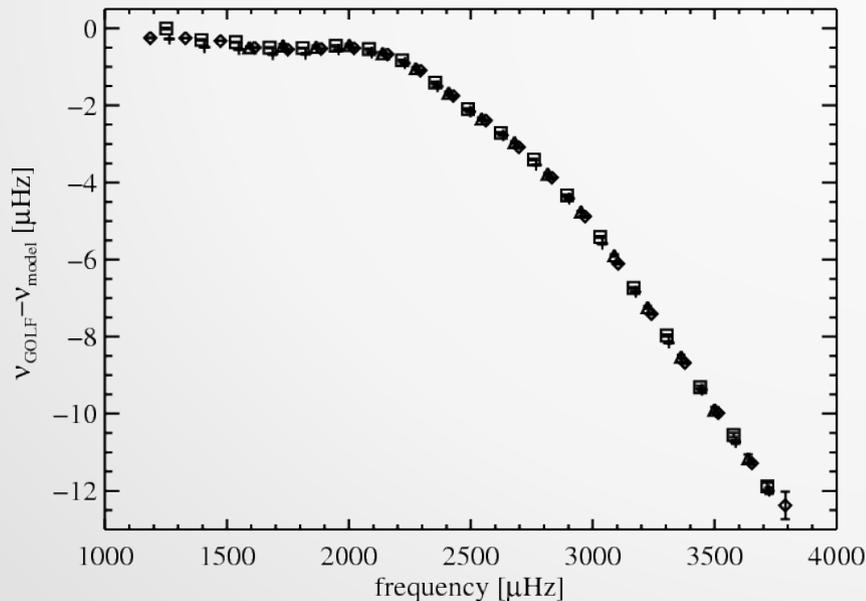
- Dans les étoiles à enveloppe convective de SP
 - Modes p : visibles, haute fréquence
 - Modes g : basse fréquence, sondent le cœur mais pas ou peu visibles (évanescents dans l'enveloppe convective)
 - Pas de modes mixtes
- Dans les étoiles plus évoluées :
 - Apparition de modes mixtes : grande information sur le cœur (caractères g), visible en surface (caractère p)

Effets de surface

- Écarts entre observations et modèles :

Impact de la **vitesse du son**, de la **densité**, de la **surface**

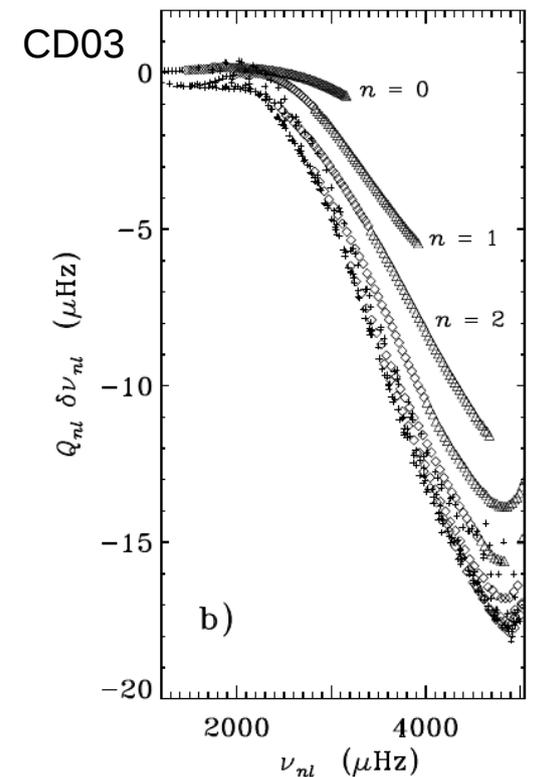
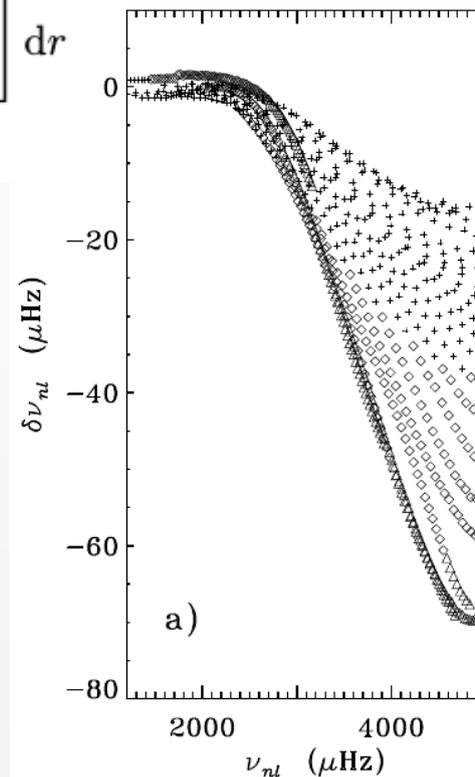
$$\frac{\delta\omega_{nl}}{\omega_{nl}} = \int_0^R \left[\underbrace{K_{c^2,\rho}^{nl}(r)}_{\text{green}} \frac{\delta_r c^2}{c^2}(r) + \underbrace{K_{\rho,c^2}^{nl}(r)}_{\text{blue}} \frac{\delta_r \rho}{\rho}(r) \right] dr + \underbrace{Q_{nl}^{-1} \mathcal{G}(\omega_{nl})}_{\text{red}} + \epsilon_{nl},$$



Degrés $\ell = 0-3$

$$Q_{nl} = I_{nl}/I_0(\omega_{nl})$$

$$I_{nl} = \int_V \rho |\vec{\xi}_{nlm}|^2 dV$$



+ : degrés $\ell < 200$
 ◇ : $200 < \ell < 500$

Effet de surface

- **Origines: mauvaise modélisation des couches superficielles**

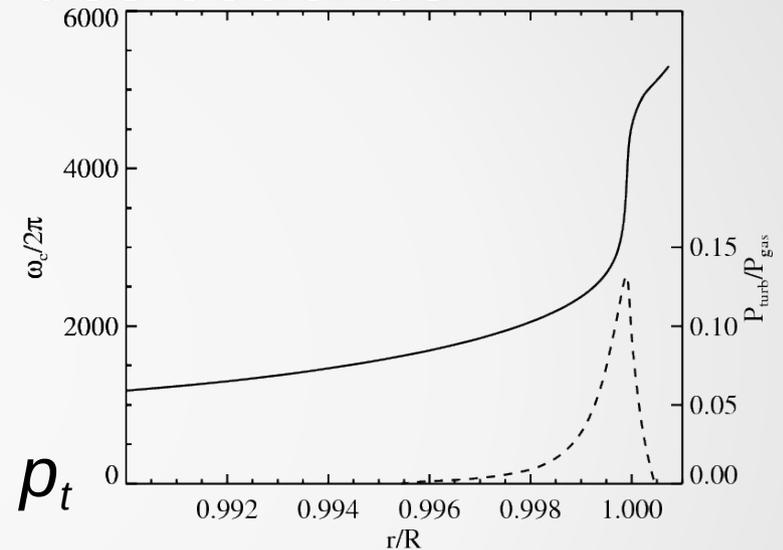
- *Modèles 1-D mais processus dynamiques*

- **Effets de la structure**

- *Impact de la pression turbulente p_t*
- *Convective back-warming*

- **Equations des oscillations**

- *fluctuations de p_t*
- *Effets non adiabatiques*

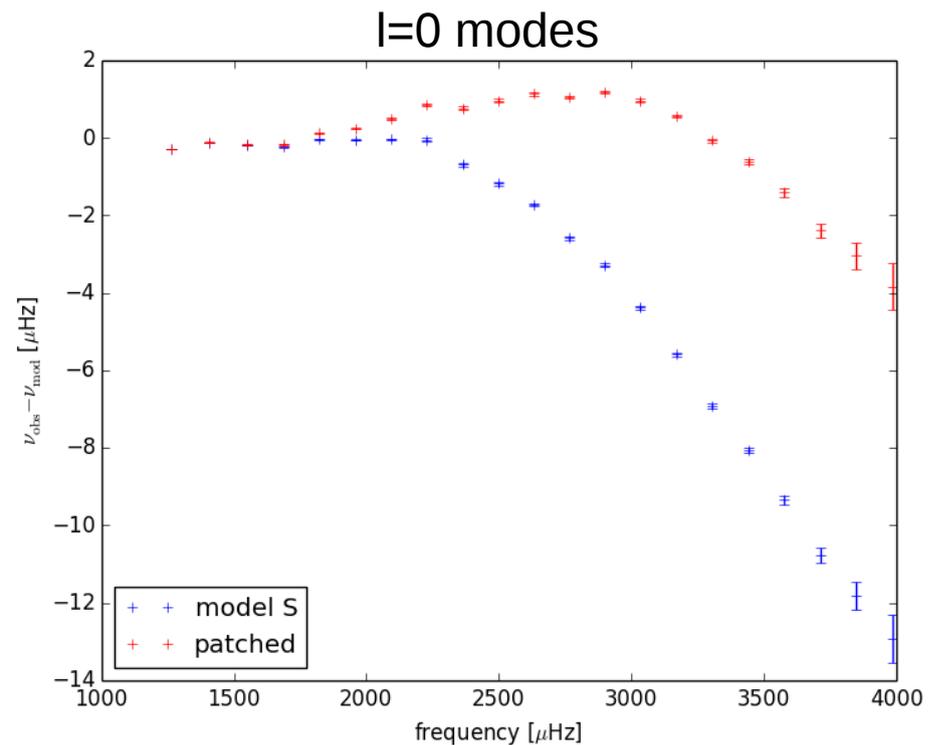
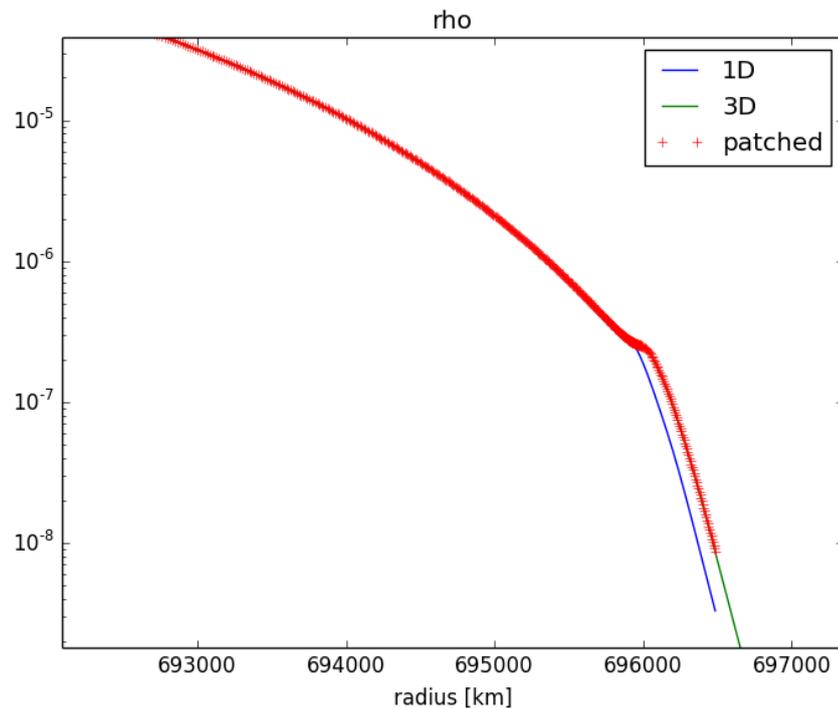


Modèles 3D d'atmosphère

Convection dependant du temps (TDC)

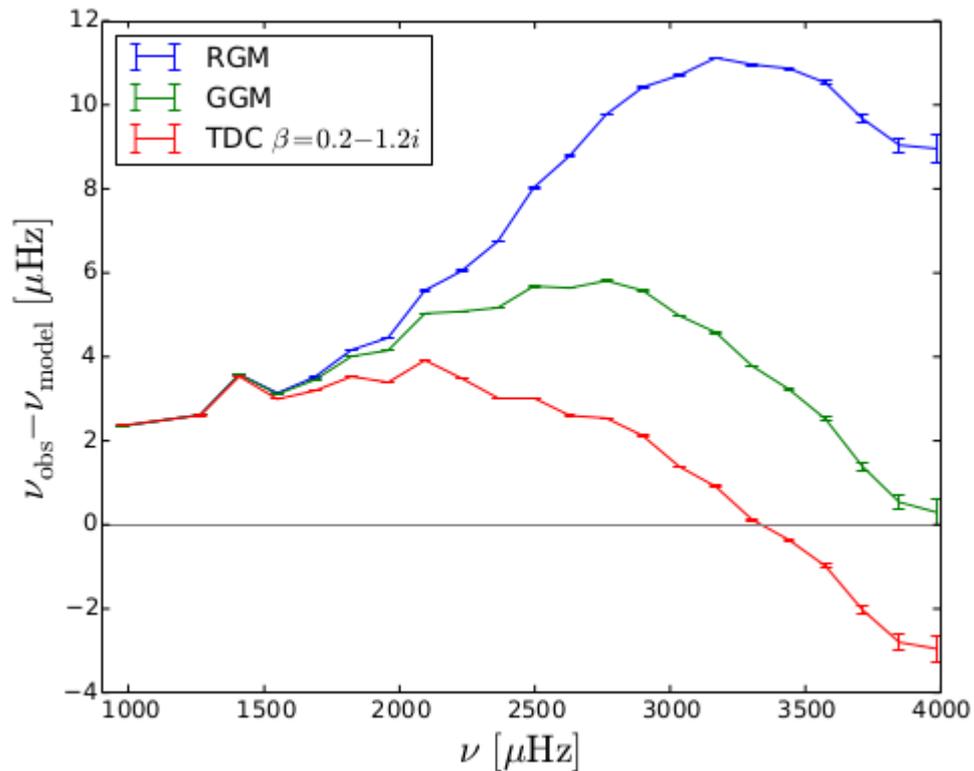
Modèles « patchés »

- Structure interne 1D + profils moyens de simulations 3D
[Stein & Nordlund 1991; Rosenthal+ 1995, 1999; Yang & Li 2007; Piau+ 2014; Bhattacharya+ 2015; Sono+ 2015, 2017; Magic & Weiss 2016; Ball+ 2016; Houdek+ 2017; Trampedach+ 2017]
- Exemple modèle S + ANTARES 3D solar sim + TOP code

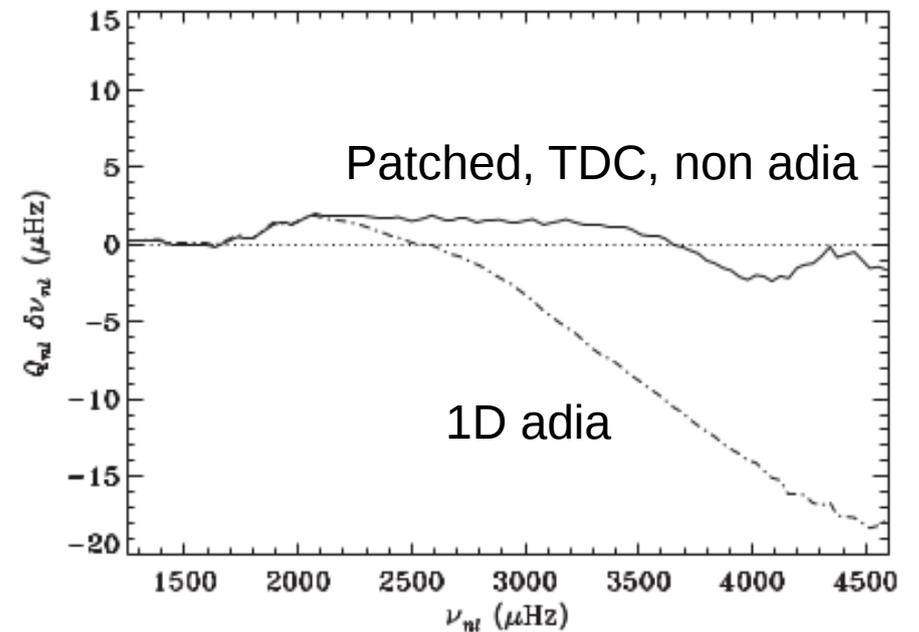


Calculs incluant un modèle TDC

Sonoi+ 2017



Houdek+ 2017



- **Gas Γ model:** $\delta p_t/p_t \approx \delta p/p \approx \delta p_g/p_g = \Gamma_1 \delta \rho/\rho$ (GGM)
- **Reduced Γ model:** $\delta p_t/p_t \approx 0 \rightarrow \delta p/p \approx (\Gamma_1 p_g/p) \delta \rho/\rho$ (RGM)

Analyser les données : prescriptions ad-hoc

- **Soleil**

- *Pas besoins de prescriptions: &R (& M) sont connus*

- **Autres étoiles:** corrections ad-hoc $\delta v = v_{\text{cor}} - v_{\text{mod}}$

- K08 [Kjeldsen+ 2008]: $\delta v = a (v/v_0)^b$ (b déduit du Soleil)

- BG14 [Ball & Gizon 2014] $\delta v = a_3(v/v_0)^3 / I$

- BG14c [Ball & Gizon 2014] $\delta v = (a_{-1}(v/v_0)^{-1} + a_3(v/v_0)^3) / I$

- S15 [Sonoit+ 2015] $\delta v = a(1 - 1 / (1 + (v/v_0)^b))$ (déduit de modèles patchés)

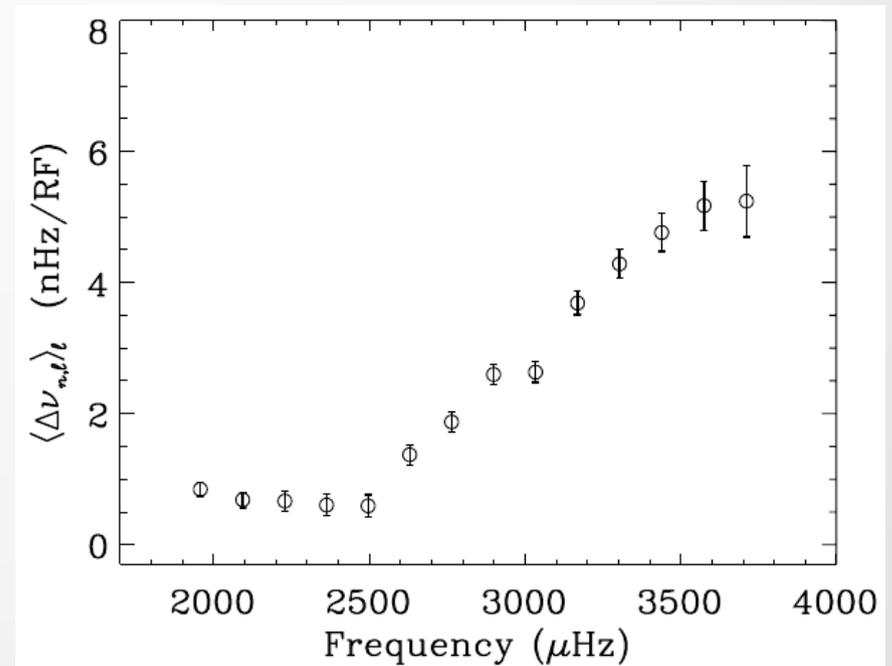
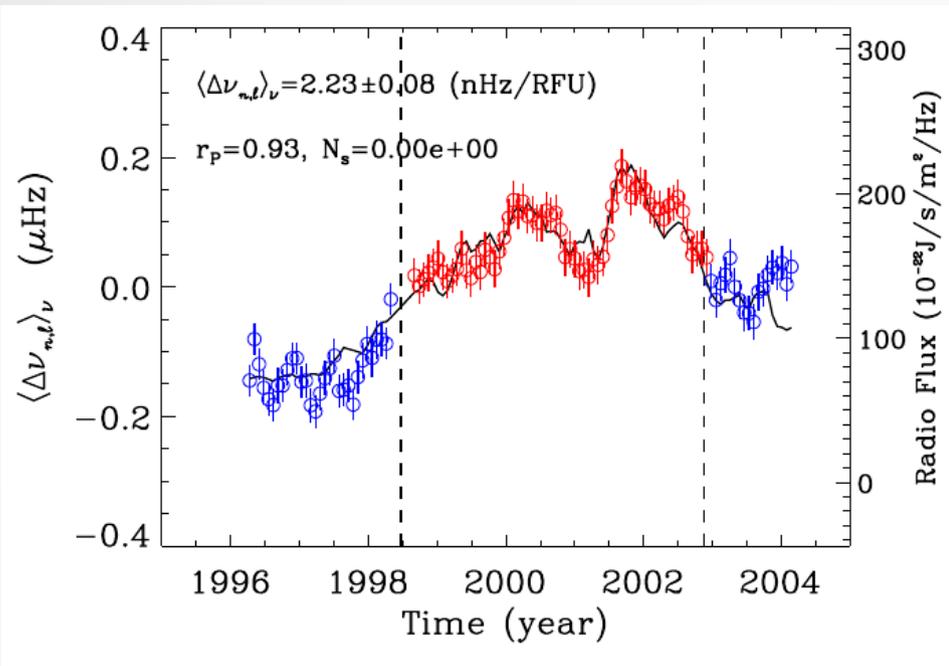
- Paramètres supplémentaires à ajuster

- Prendre en compte l'inertie des modes par rapport aux modes radiaux

$$Q_{nl} = I_{nl} / I_{l=0}(v_{nl})$$

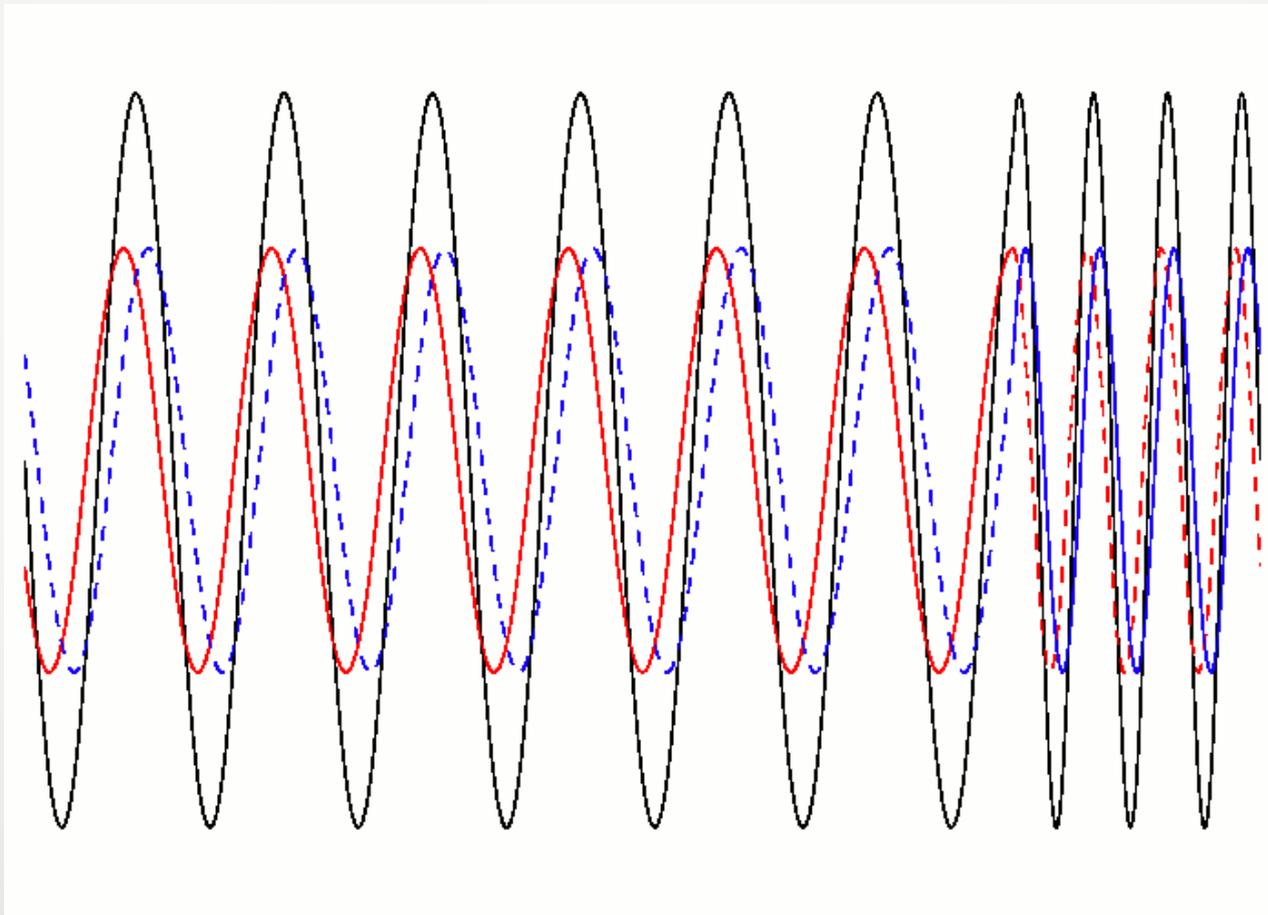
Surface : impact de l'activité sur les fréquences

- L'activité est un effet de surface :
 - Variation de B → modification des couches superficielles → variations des fréquences



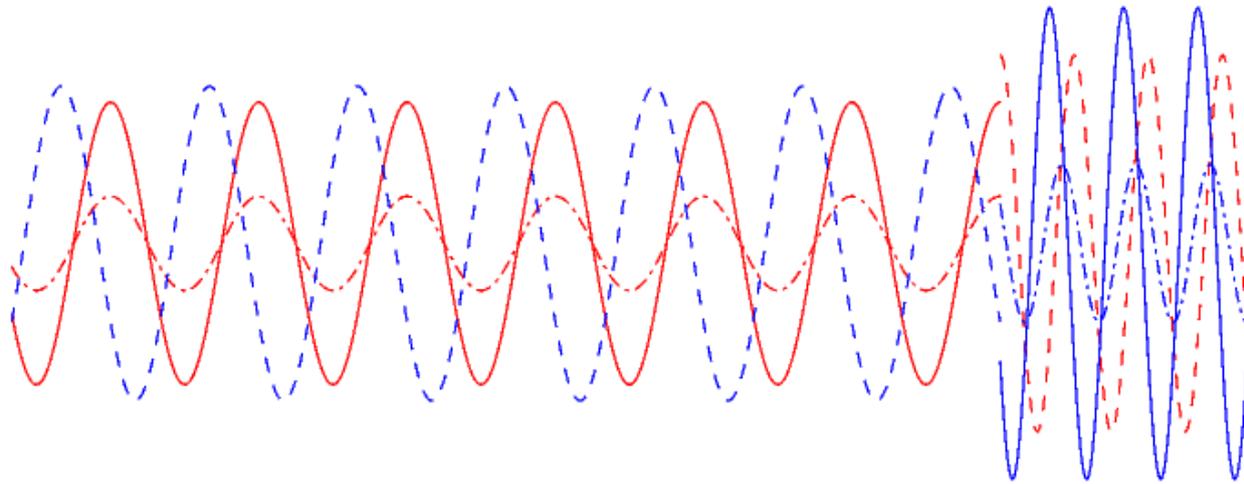
Discontinuité dans un tube acoustique

- 2 domaines avec $c_1 = 2c_2$; transition à $l = 0.8L$



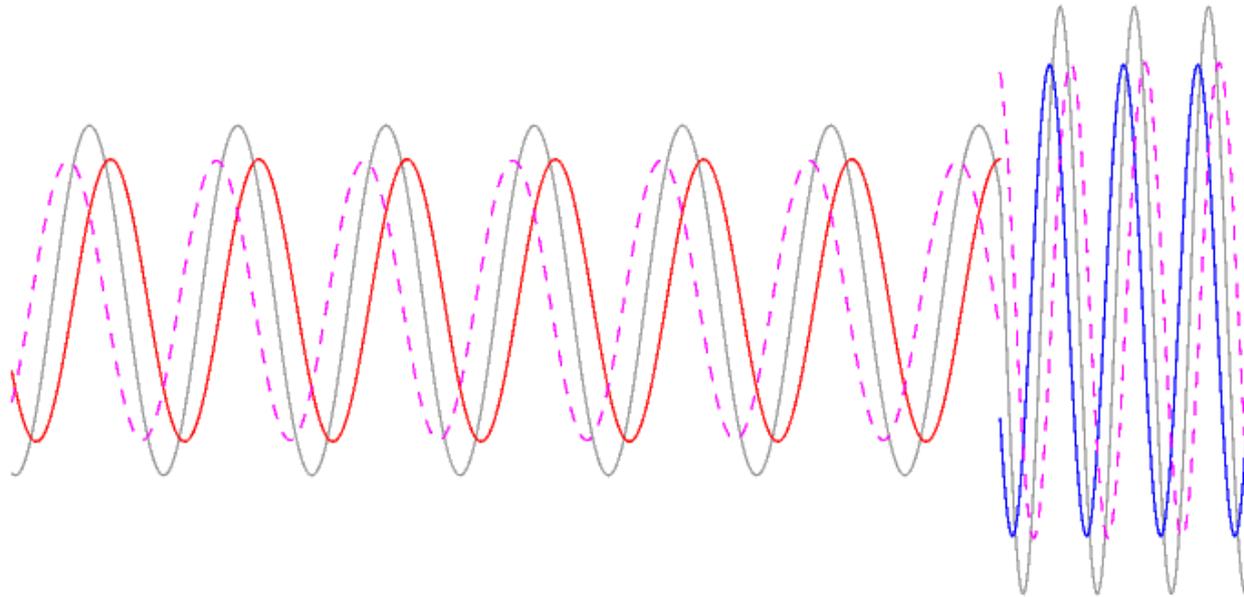
Discontinuité dans un tube acoustique

- 2 domaines avec $c_1 = 2c_2$; transition à $l = 0.8L$
- Réflexion partielle



Discontinuité dans un tube acoustique

- 2 domaines avec $c_1 = 2c_2$; transition à $l = 0.8L$
- Réflexion partielle

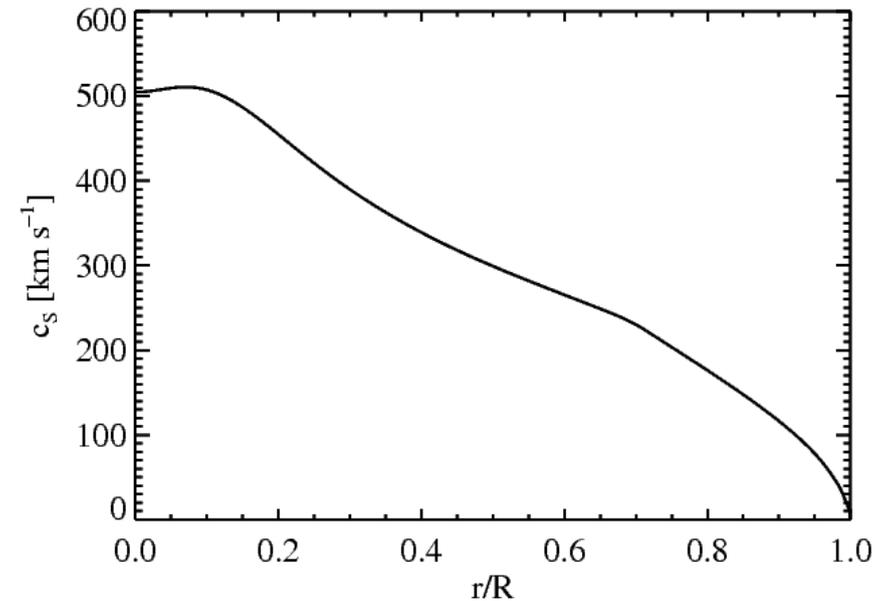
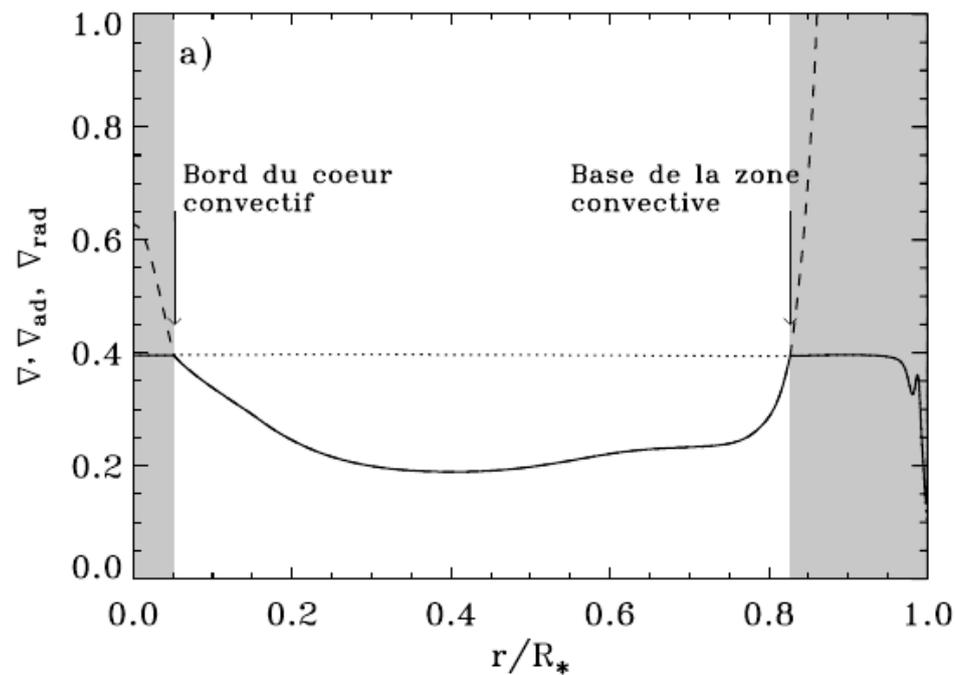


Effet de la discontinuité sur les fréquences

- Solutions de $d^2\Psi/dr^2 + (\omega/c)^2 \Psi = 0$ avec
 - C.L. : $\Psi(0)=\Psi(L)=0$,
 - Continuité $\Psi_1(l) = \Psi_2(l)$, $c_1^2 d\Psi_1/dr(l) = c_2^2 d\Psi_2/dr(l)$
- On déduit la relation de quantification
 $c_1 \tan(\omega\tau_2) + c_2 \tan(\omega\tau_1) = 0$
avec $\tau_1 = l/c_1$ et $\tau_2 = (L-l)/c_2$
- Si $c_1=c_2$, on retrouve $\omega_n^{(0)} = n\pi/\tau$ ($\tau = \tau_1 + \tau_2$)
- En développant $c_2 = (1+\varepsilon) c_1$ on montre que
 $\omega_n = \omega_n^{(0)} + \varepsilon [2(\tau+\varepsilon\tau_1)]^{-1} \sin(2\omega\tau_1+\pi)$

Application aux étoiles

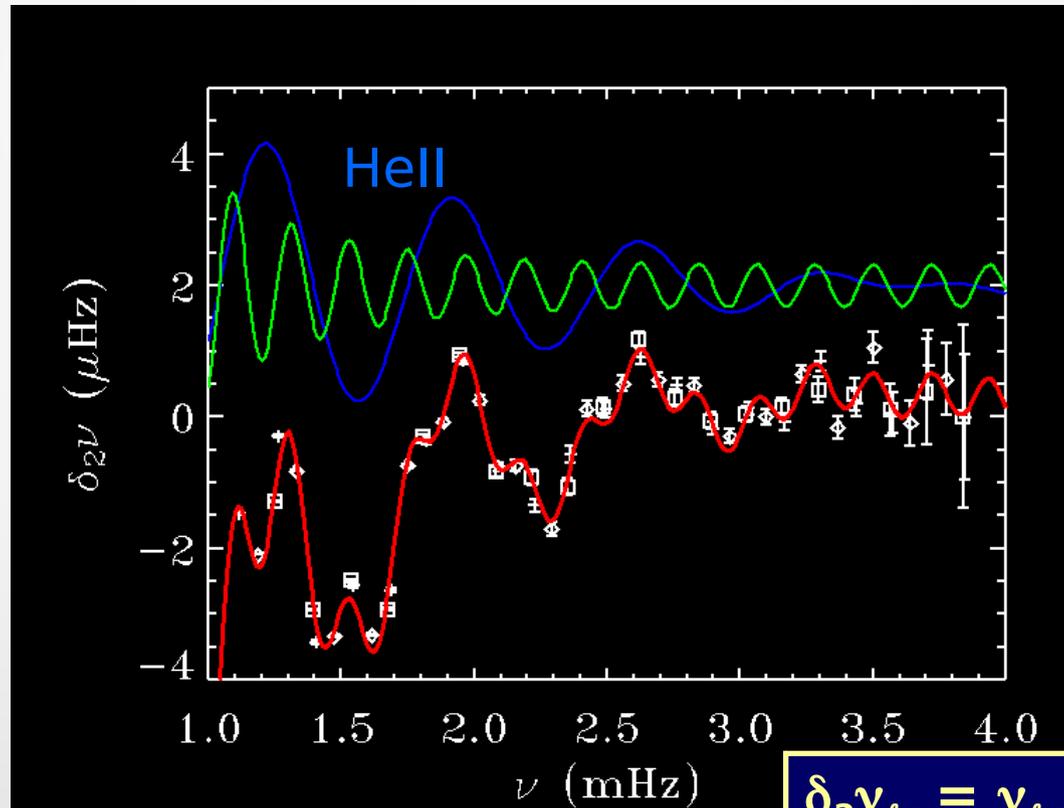
- Variation rapide de c ou ses dérivées
Vorontsov 1988, Gough 1990, Monteiro et al; 1994, Roxburgh&Vorontsov 1994...
 - Transition radiation convection (BZC, cœur convectif)
 - Zone d'ionisation H, HI, HII (variation de Γ_1)



Application au Soleil

- Sonder la BCZ et la zone de Hell (& le contenu en He)
[e.g. Monteiro et al 2000, R&V2001, Mazumdar & Antia 2001, Basu et al 2004, Ballot et al 2004, Piau et al. 2005, Monteiro & Thompson 2005]

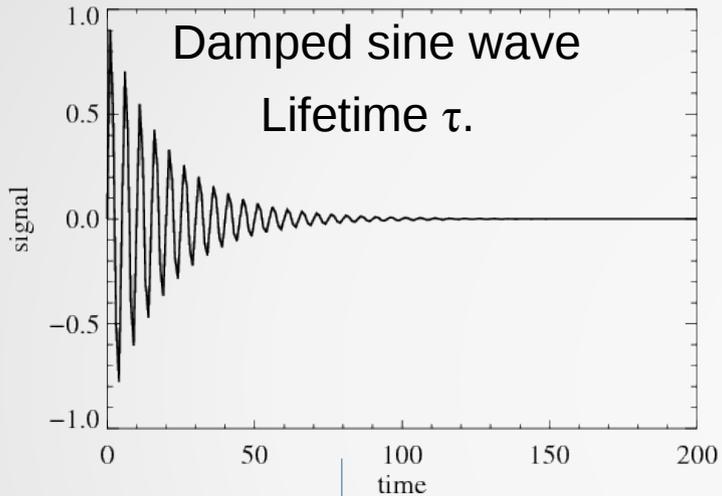
- Période du glitch = $1/2\tau_d$ profondeur acoustique $\tau_d = \int_{r_c}^R \frac{dr}{cS}$



Nature de l'excitation des modes

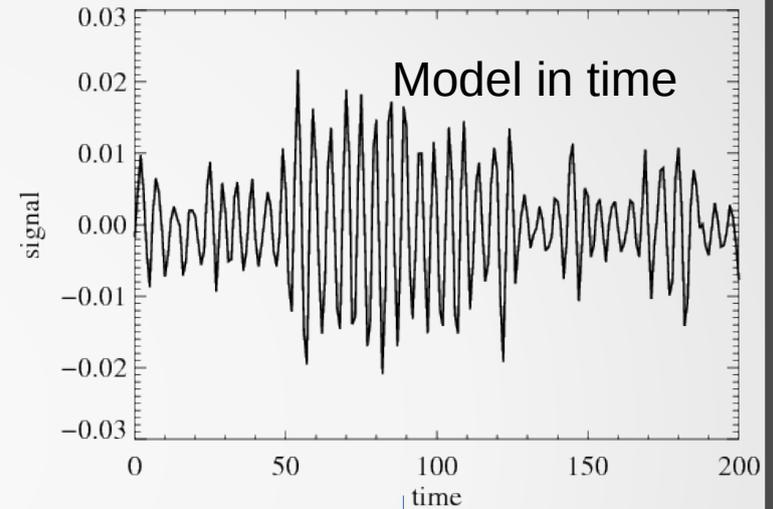
- La plupart des oscillations stellaires sont dus à des modes naturellement instables sous l'effet du mécanisme κ .
- Les modes du Soleil sont tous stables
 - Excitation par la convection
 - Excitation permanente de modes amortis
- Excitation stochastique :
 - Amortissement \rightarrow Les modes ont une largeur
 - Amplitude des modes \sim fonction smooth (\sim gaussienne) de la fréquence seule

Modèle d'un mode

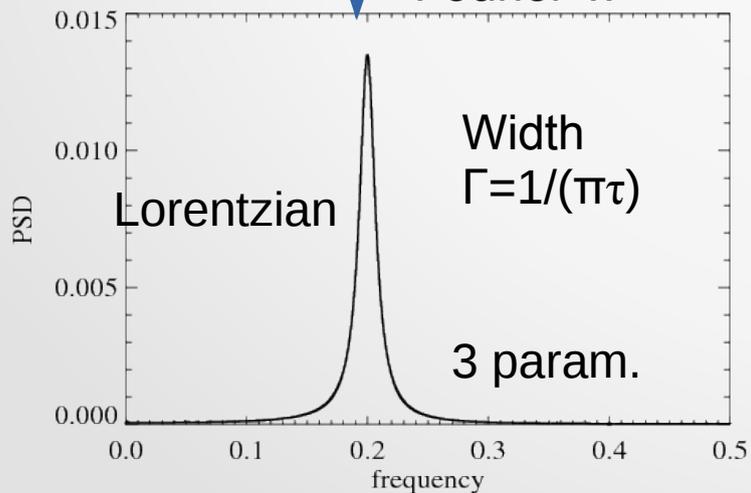


re-excitation

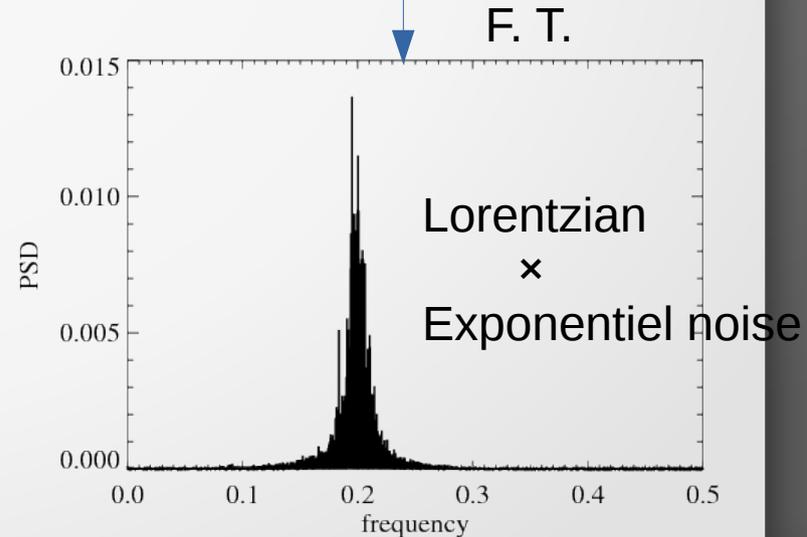
CONVOLVED
by random function



Fourier T.

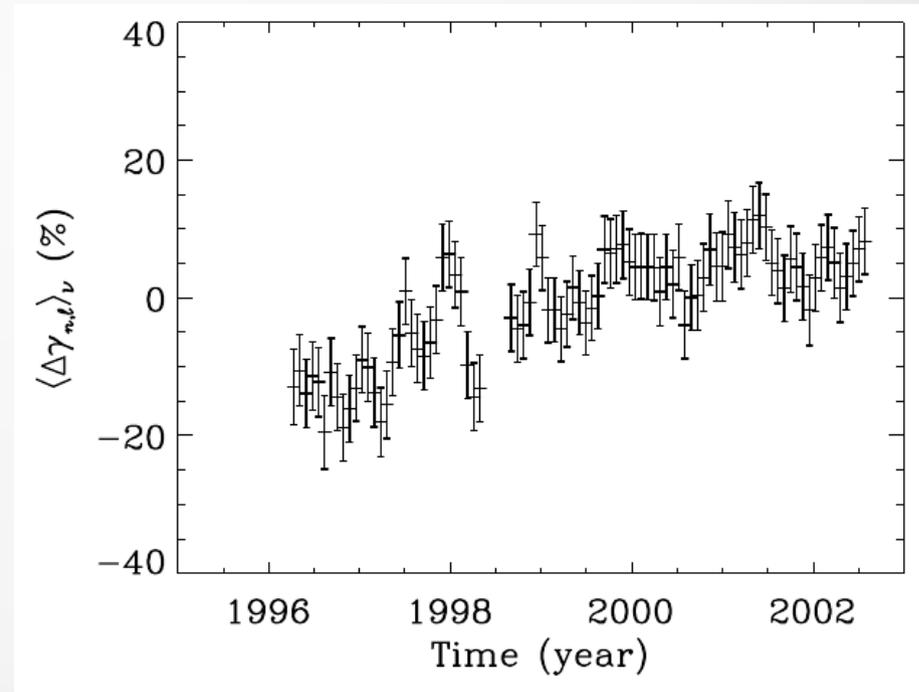
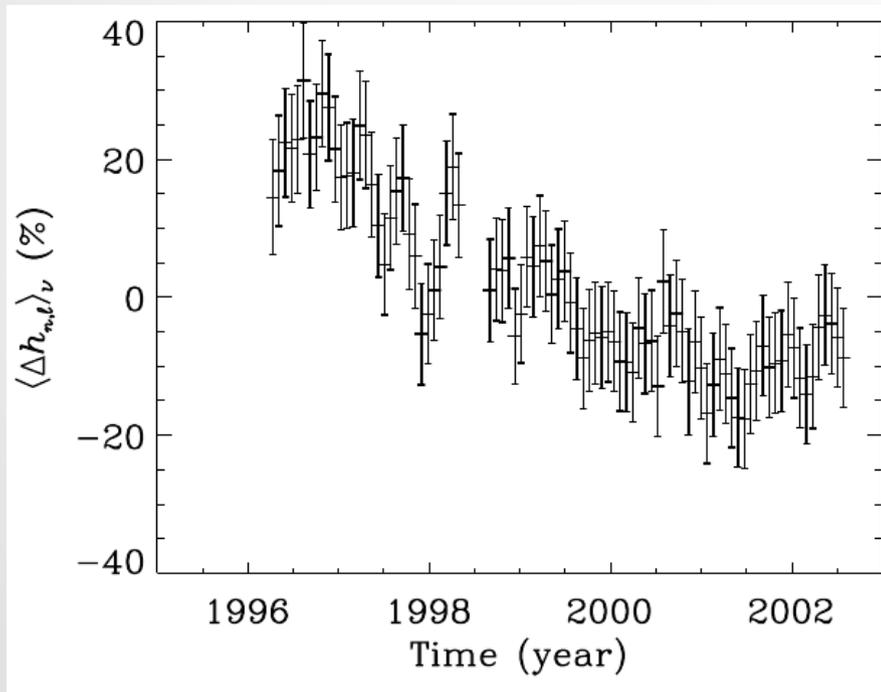


MULTIPLIED
by FT of random
function



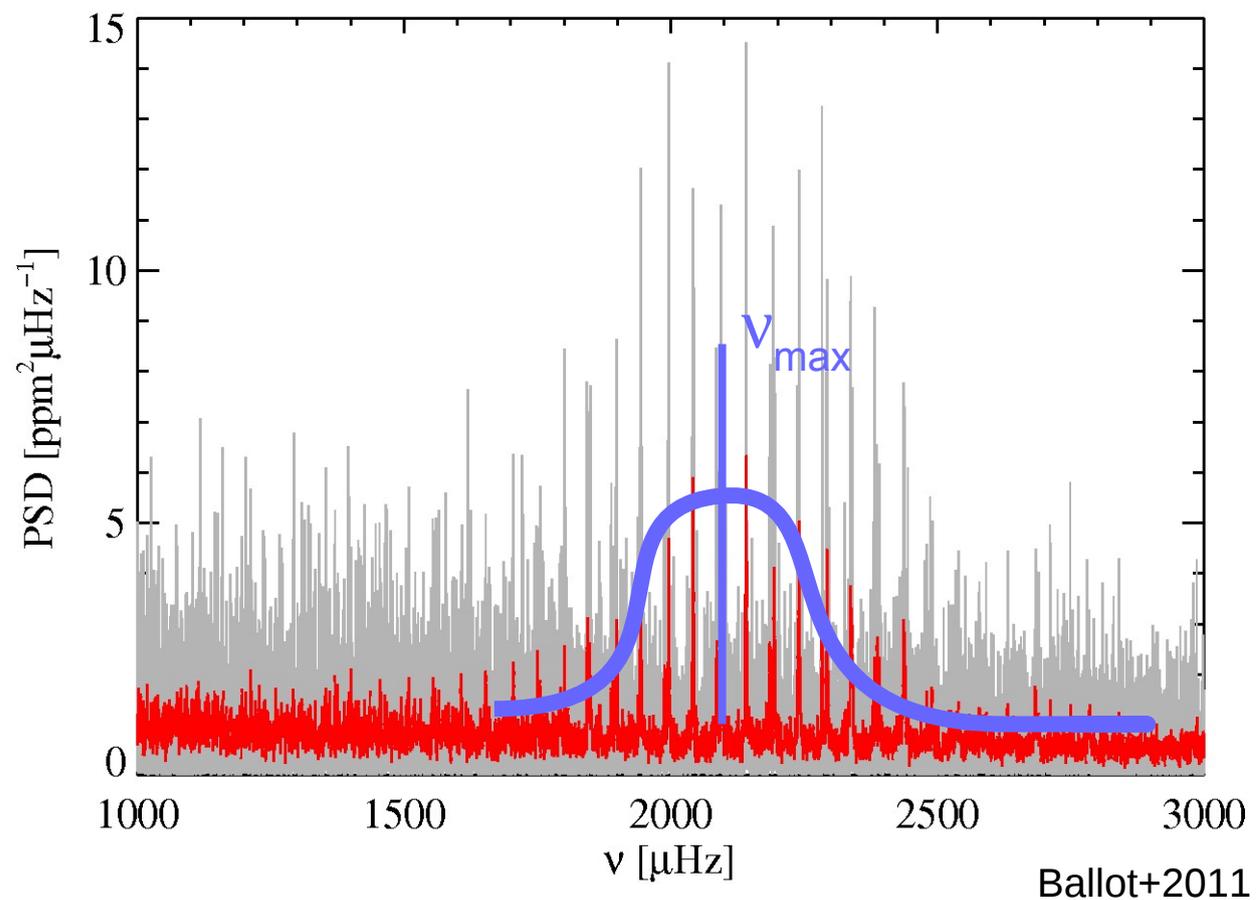
Impact de l'activité sur amplitudes et largeurs

- Modes plus amortis quand l'activité augmente
→ Amplitudes décroissent, largeurs croissent



Fréquence du maximum d'oscillation ν_{\max}

HD52265



Lien entre ν_{\max} et paramètres globaux de l'étoile

- ν_{\max} lié aux propriétés de l'atmosphère

- $\nu_{\max} \propto \nu_c$ [Belkacem et al. 2011, 2013]

$$\nu_{\max} \propto \frac{c_s}{4\pi H_p} \propto \left(\frac{p}{\rho}\right)^{1/2} \frac{g\rho}{p}$$

$$\nu_{\max} \propto g T_{\text{eff}}^{-1/2}$$

$$\nu_{\max} \propto M R^{-2} T_{\text{eff}}^{-1/2}$$

Le même type de temps guide le temps typique de la granulation... (qui joue un rôle moteur dans l'excitation)

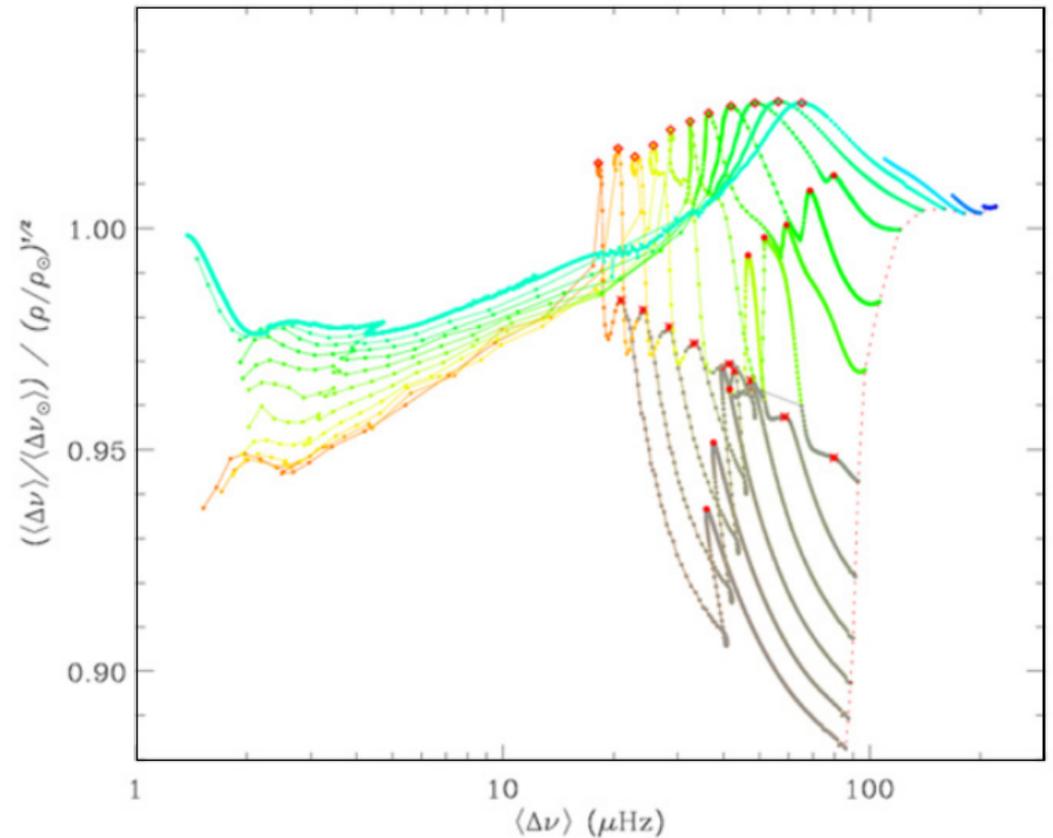
ν_{\max} permet de déterminer $\log g$ précisément !

Lien entre $\Delta\nu$ et paramètres globaux de l'étoile

- On a vu $\Delta\nu \approx \left(2 \int \frac{dr}{c}\right)^{-1}$
- Par ailleurs le temps dynamique (chute libre) \rightarrow fréquence
 $\nu_0 \approx \langle G\rho \rangle^{1/2}$
- En considérant 2 étoiles homologues (à $r'/R'=r/R$, $m'/M'=m/M$), on montre que $c/c' = (M/M')^{1/2} (R/R')^{-1/2}$
 $\rightarrow \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu'} = \left(\int_0^R \frac{dr}{c}\right)^{-1} \left(\int_0^{R'} \frac{dr}{c'}\right) = (R/R')^{-3/2} (M/M')^{1/2} \propto \nu_0/\nu'_0$
- On a donc $\Delta\nu \propto M^{1/2} R^{-3/2}$

Vérification de la loi $\Delta\nu - \nu_0$

- La relation d'homologie est violée pendant l'évolution d'une étoile ou d'une étoile à une autre
 - Vérification sur des modèles → OK à <5 %



White+ 2011

Autres relations

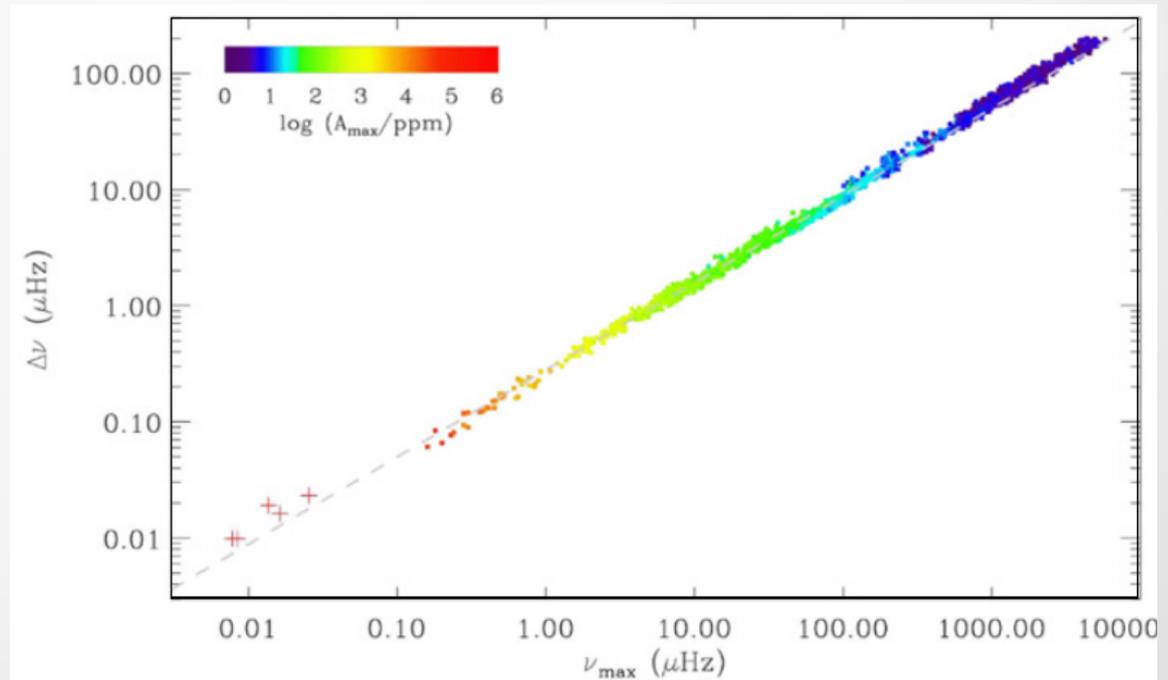
- Masse et Rayon

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\max, \odot}} \right) \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}} \right)^{-2} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\odot}} \right)^{1/2} \quad \frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\max, \odot}} \right)^3 \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}} \right)^{-4} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\odot}} \right)^{3/2}$$

– Référence « soleil » : Soleil, un ensemble d'étoiles.

- $\Delta\nu \propto M^{-1/4} T_{\text{eff}}^{3/8} \nu_{\max}^{3/4}$

Question de spécialistes :
Quelle détermination de $\Delta\nu$?



Visibilité des modes dans une courbe de lumière/vitesse

- $$\delta I(t) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \delta I(t, \mu, \varphi') W(\mu) \mu d\varphi' d\mu$$

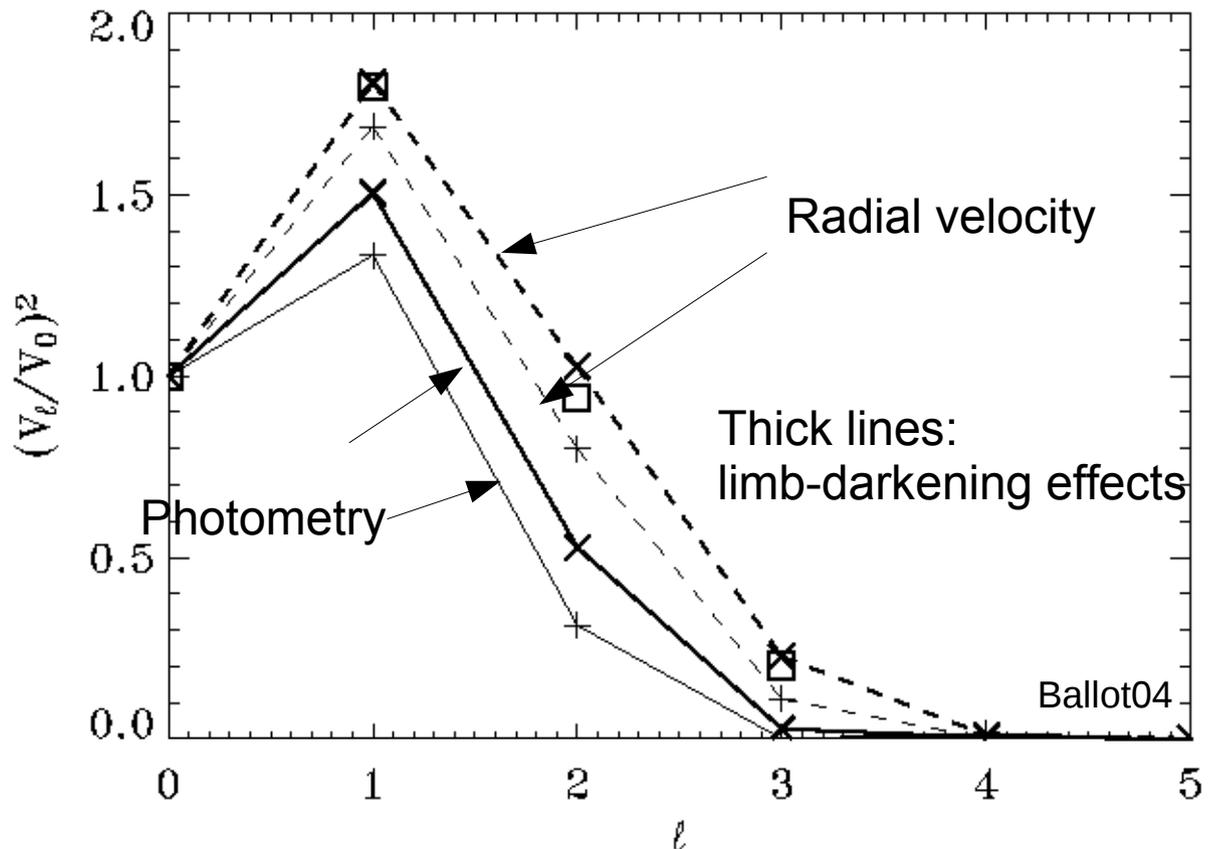
- Equipartition de l'énergie : $A_{nlm} = A(\nu)$ Toutain & Gouttebroze 1993
Gizon & Solanki 2003

- $$A_{nlm}^{(obs)} = V_l a_{lm}(i) A_{nlm}$$

$$V_l = 2\pi \int_0^1 W(\mu) P_l(\mu) d\mu$$

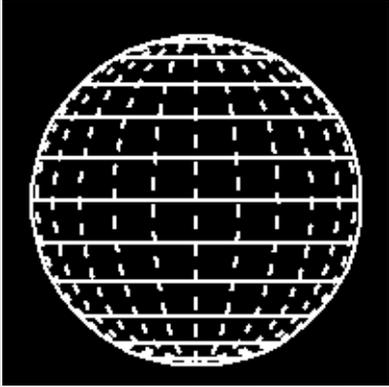
$$\sum_m a_{lm}^2(i) = 1$$

$$\sum V_{2p+1}^2 = \sum V_{2p}^2$$



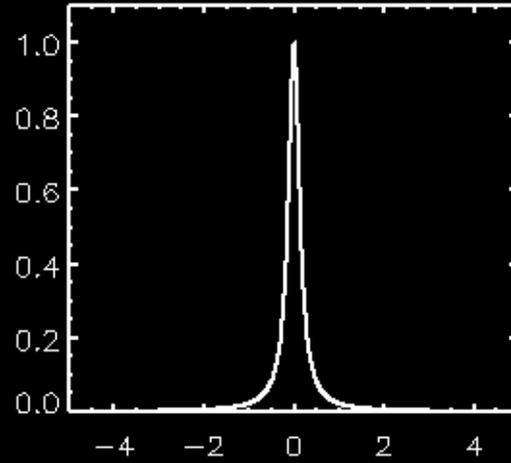
Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 0,0$$

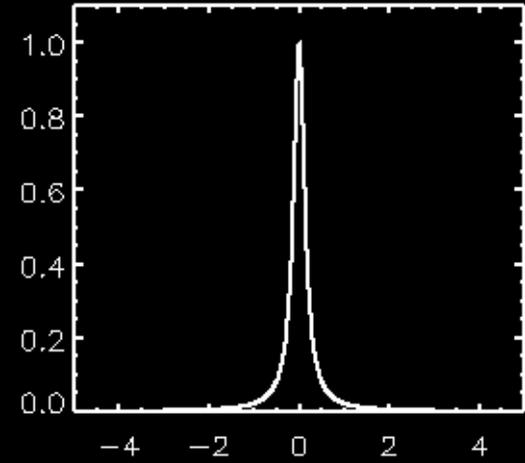


$$i = 90^\circ$$

$l=1$ mode

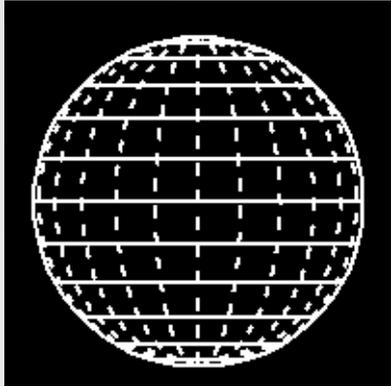


$l=2$ mode



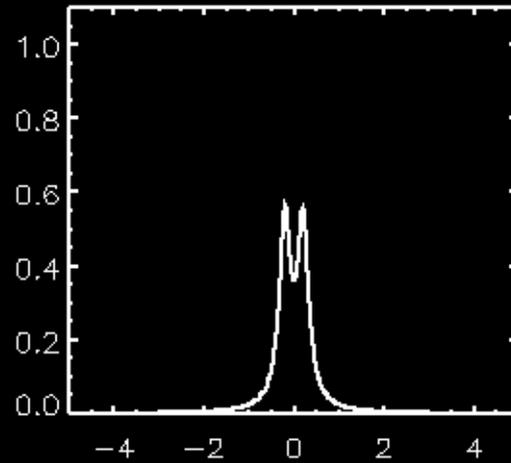
Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 0,2$$

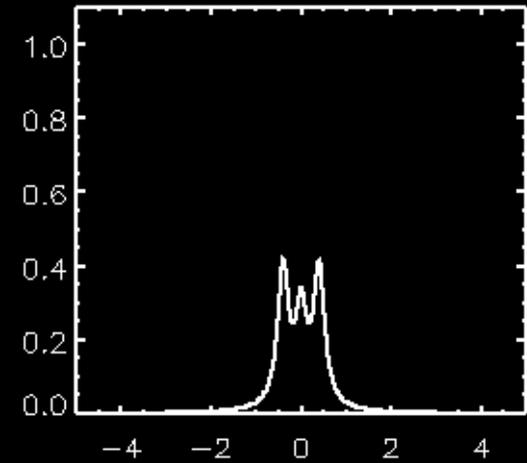


$$i = 90^\circ$$

$l=1$ mode

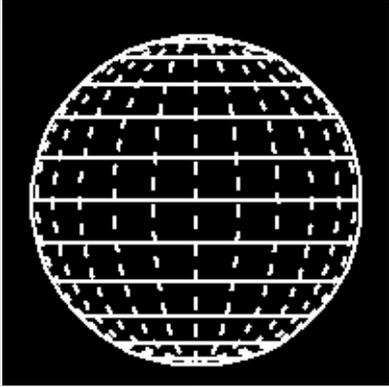


$l=2$ mode



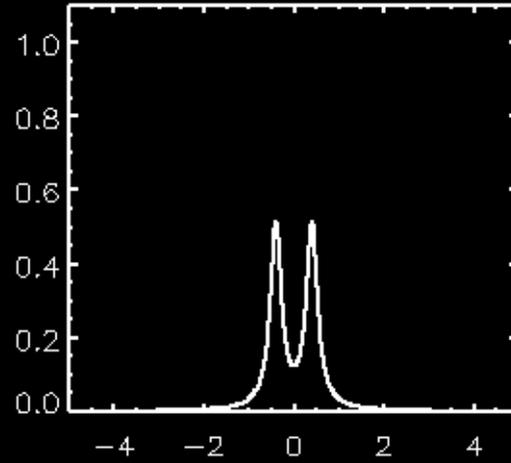
Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 0,4$$

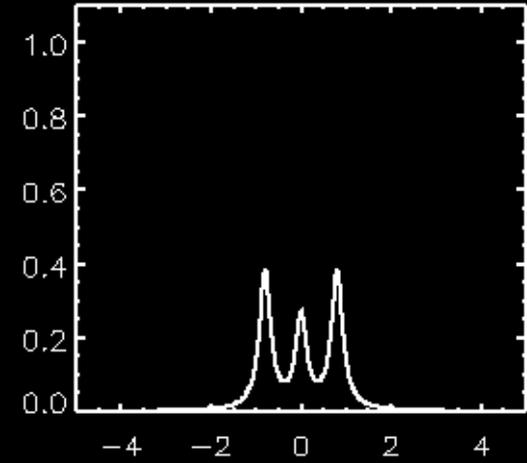


$$i = 90^\circ$$

$l=1$ mode

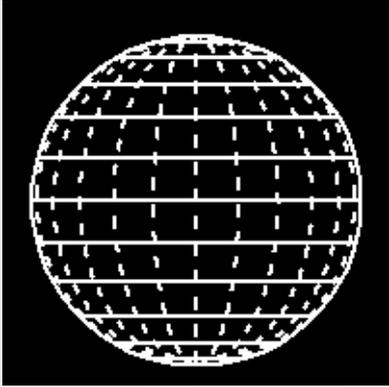


$l=2$ mode



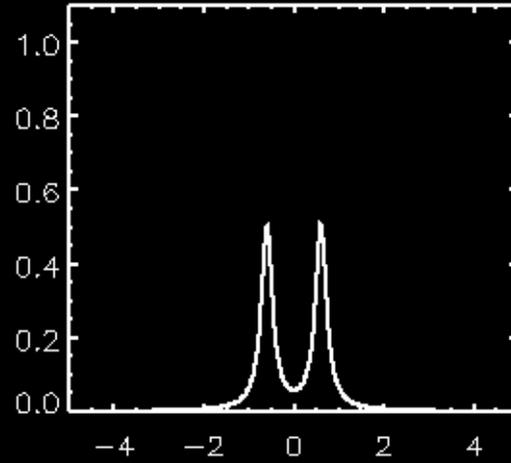
Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 0,6$$

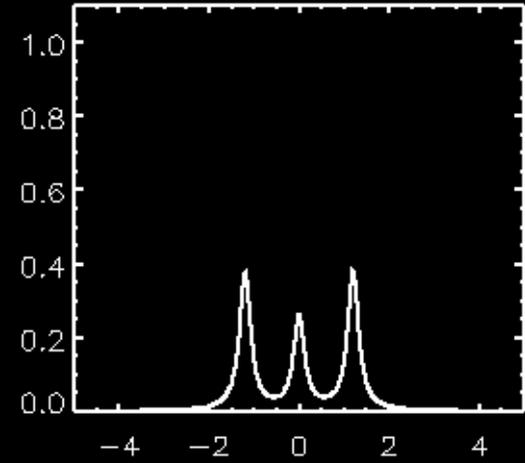


$$i = 90^\circ$$

$l=1$ mode

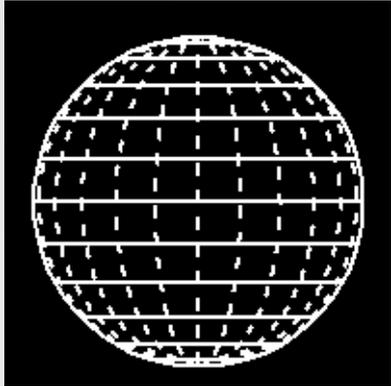


$l=2$ mode



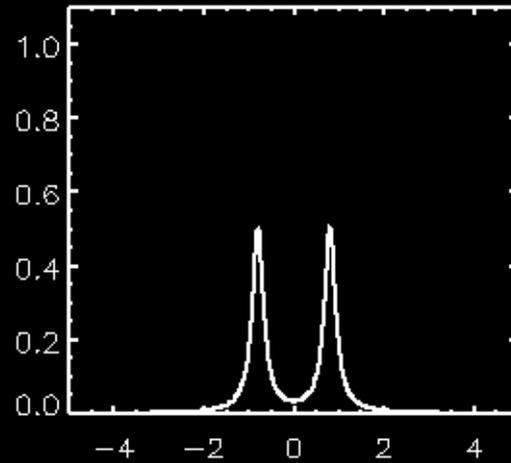
Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 0,8$$

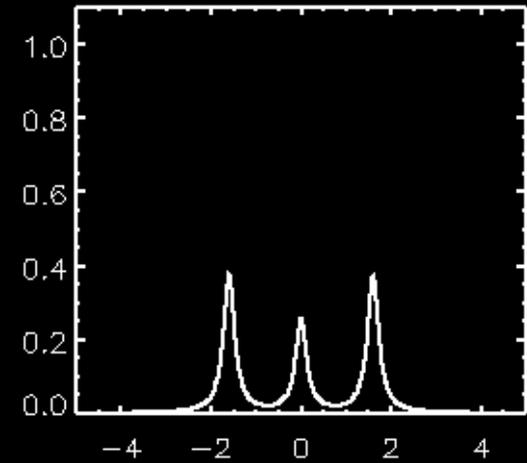


$$i = 90^\circ$$

$l=1$ mode

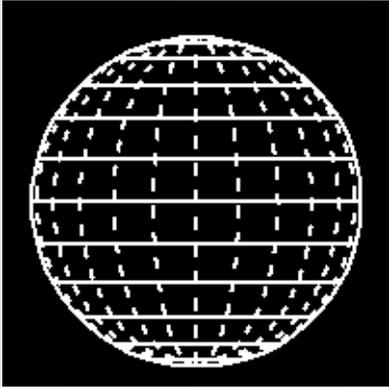


$l=2$ mode

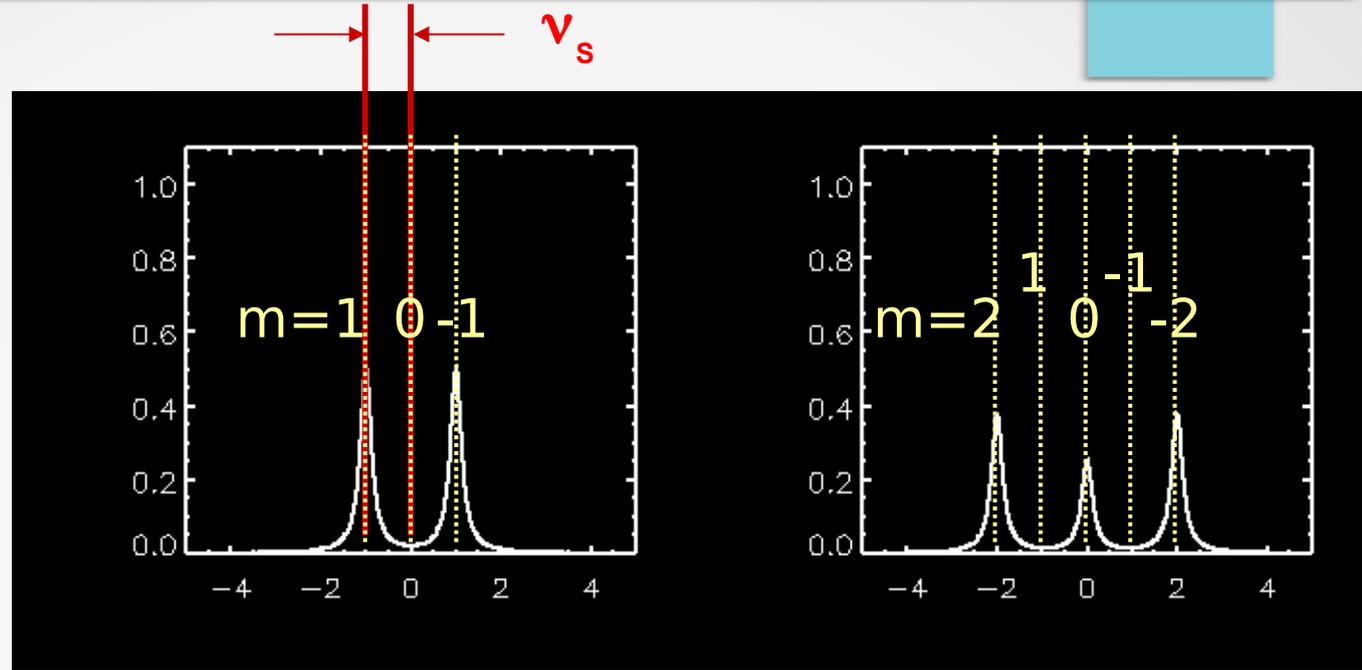


Et la rotation dans tout ça ?

$$\Omega = 1,0$$



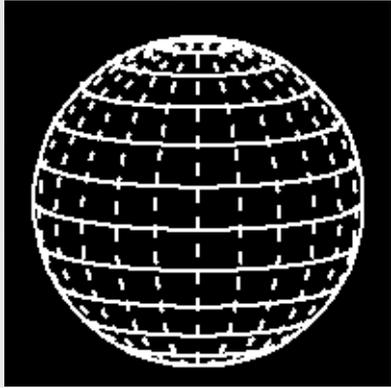
$$i = 90^\circ$$



- Splitting rotationnel.

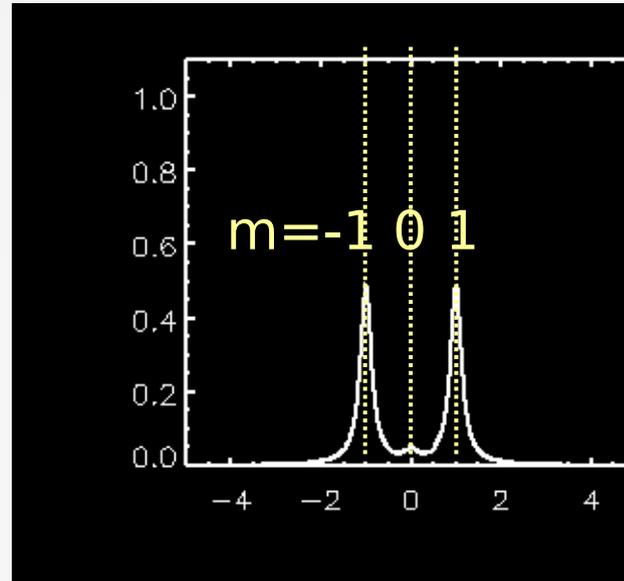
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

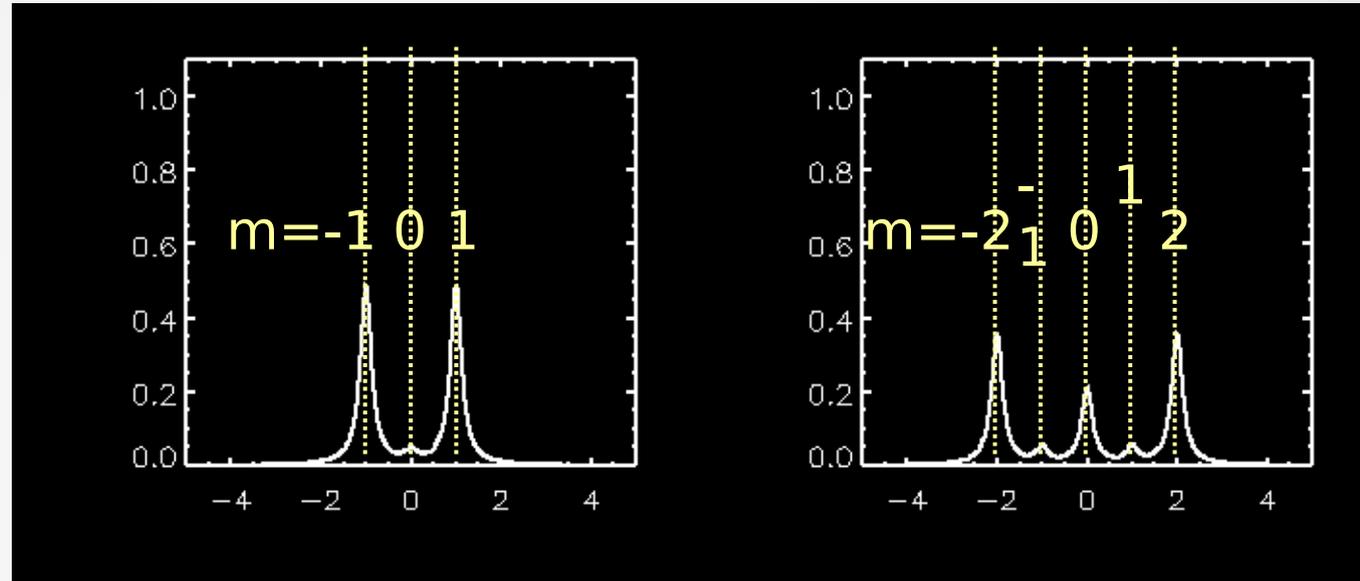


$$i = 80^\circ$$

$l=1$ mode

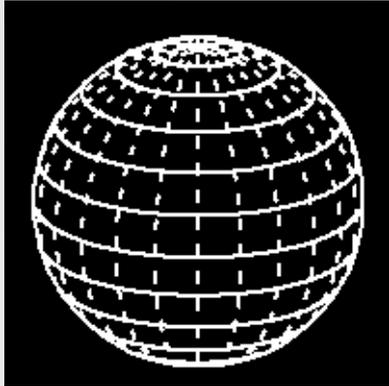


$l=2$ mode



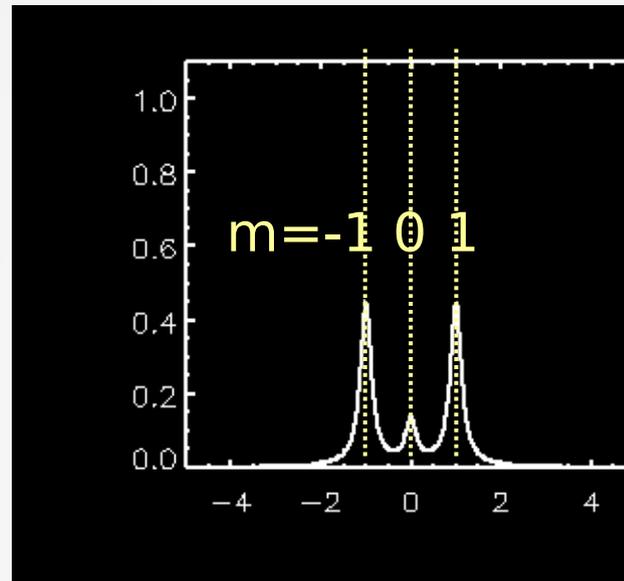
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

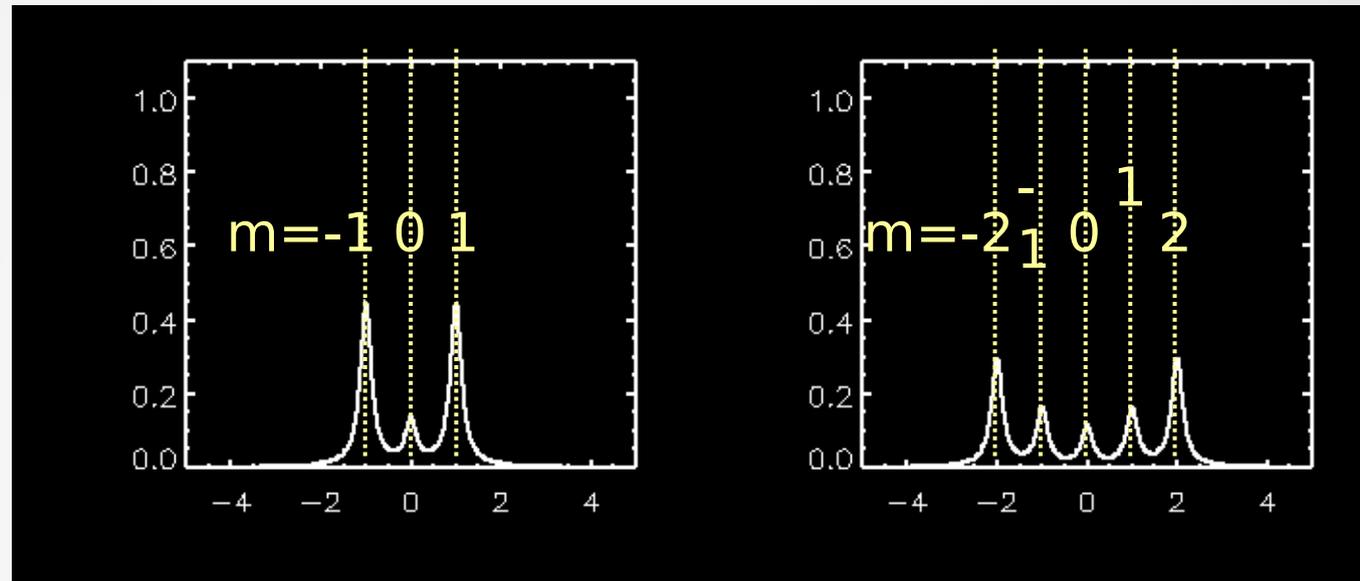


$$i = 70^\circ$$

$l=1$ mode

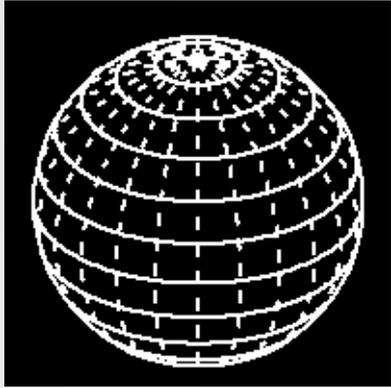


$l=2$ mode



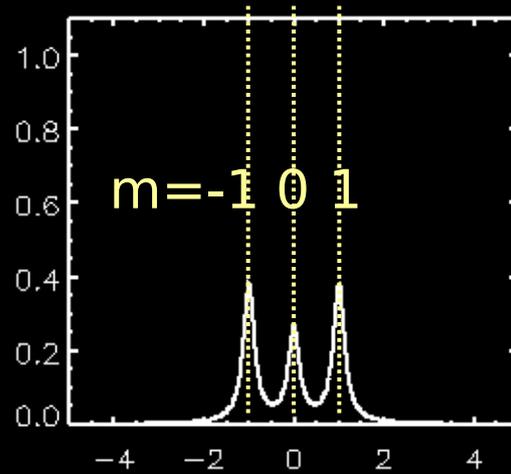
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

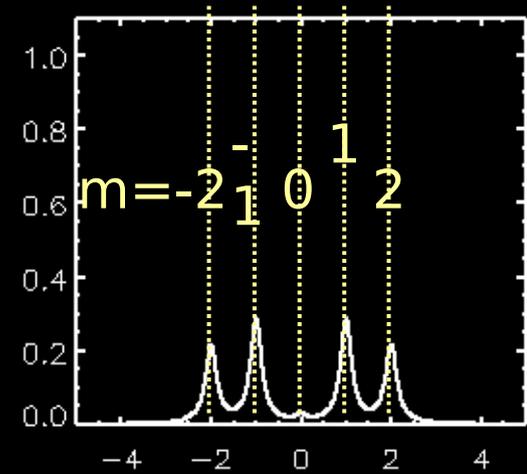


$$i = 60^\circ$$

$l=1$ mode

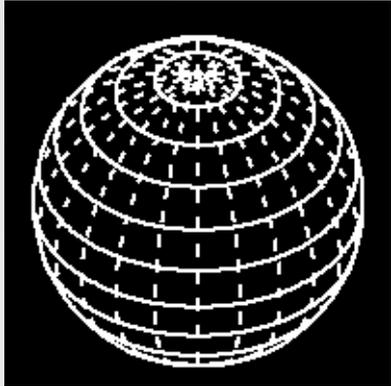


$l=2$ mode



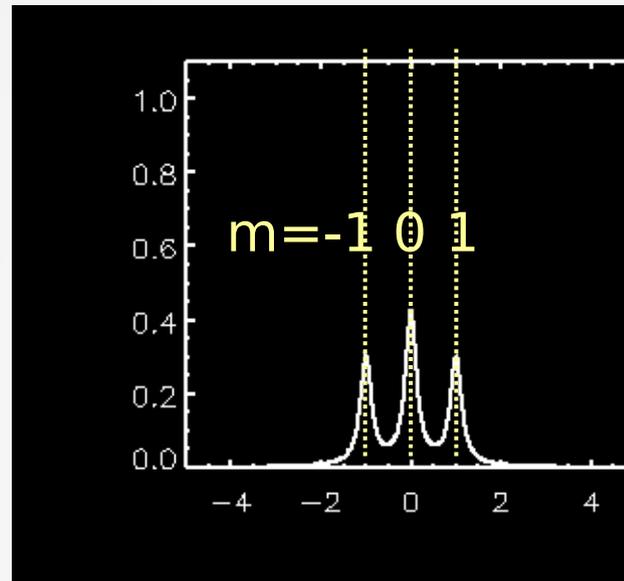
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

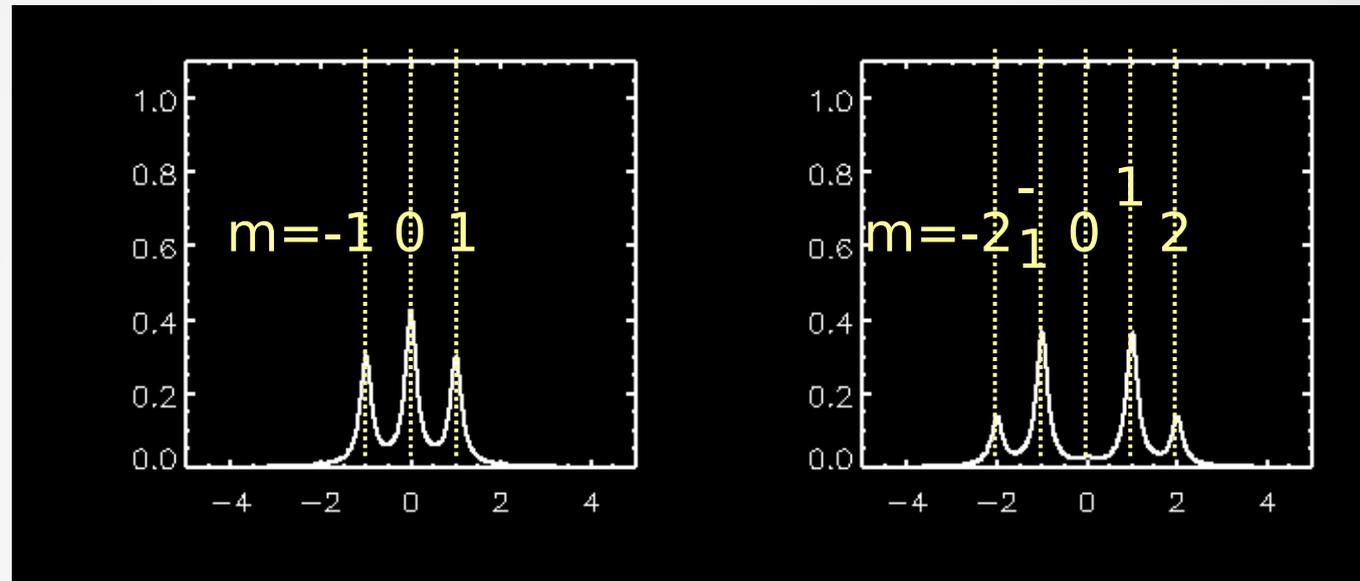


$$i = 50^\circ$$

$l=1$ mode

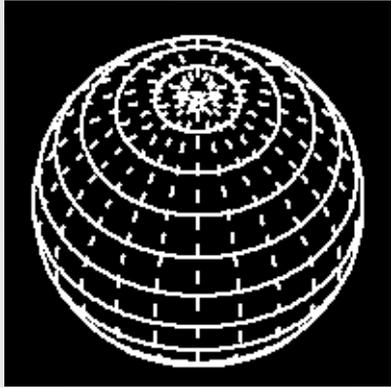


$l=2$ mode



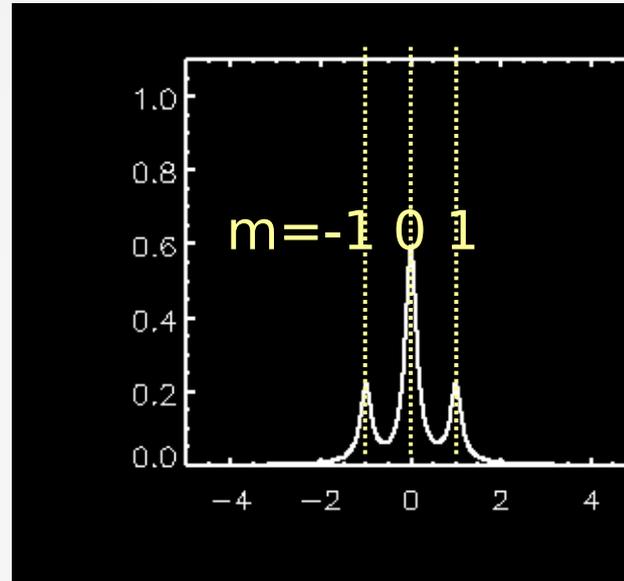
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

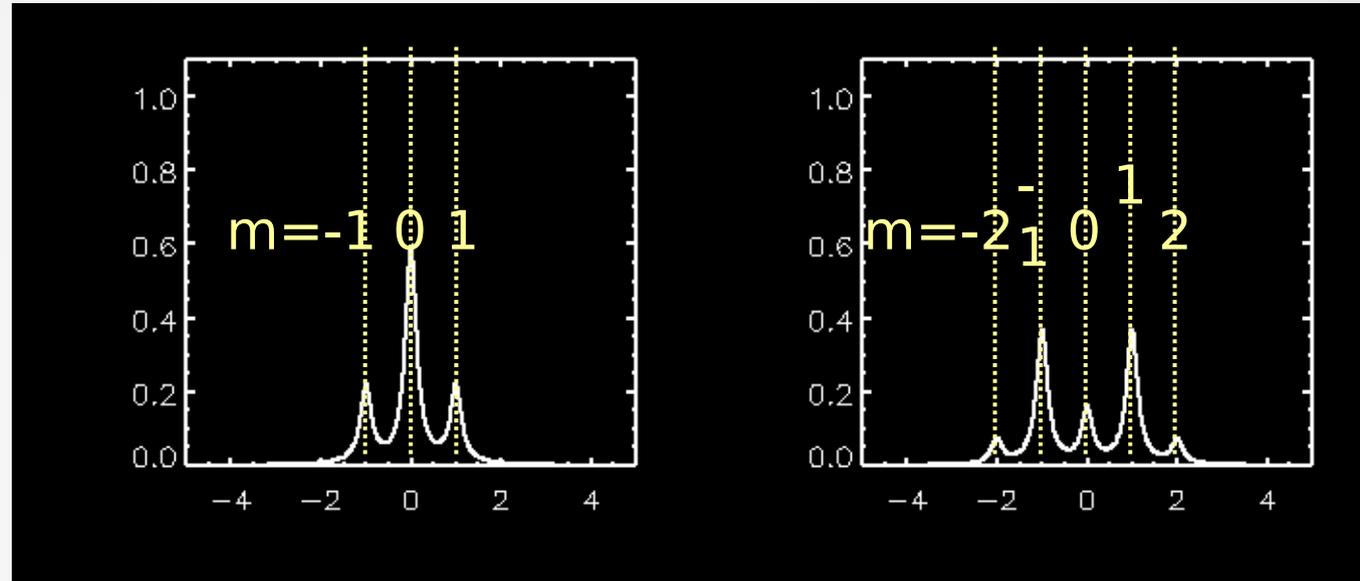


$$i = 40^\circ$$

$l=1$ mode

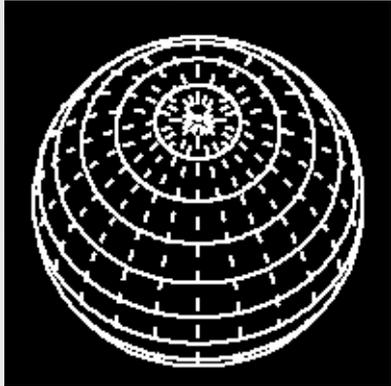


$l=2$ mode



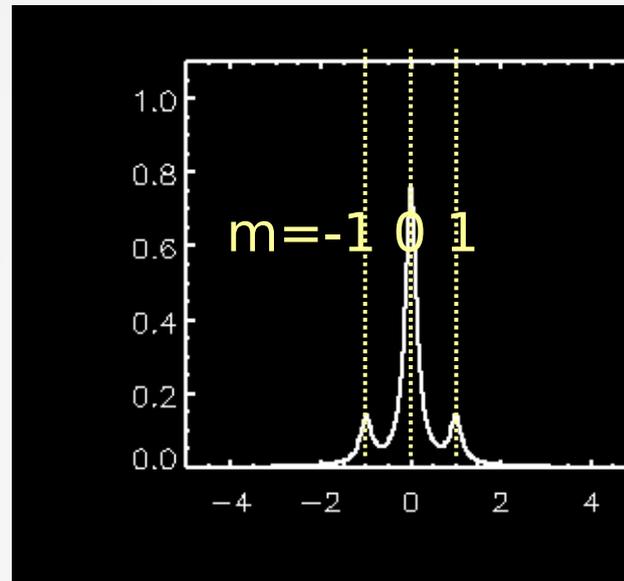
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

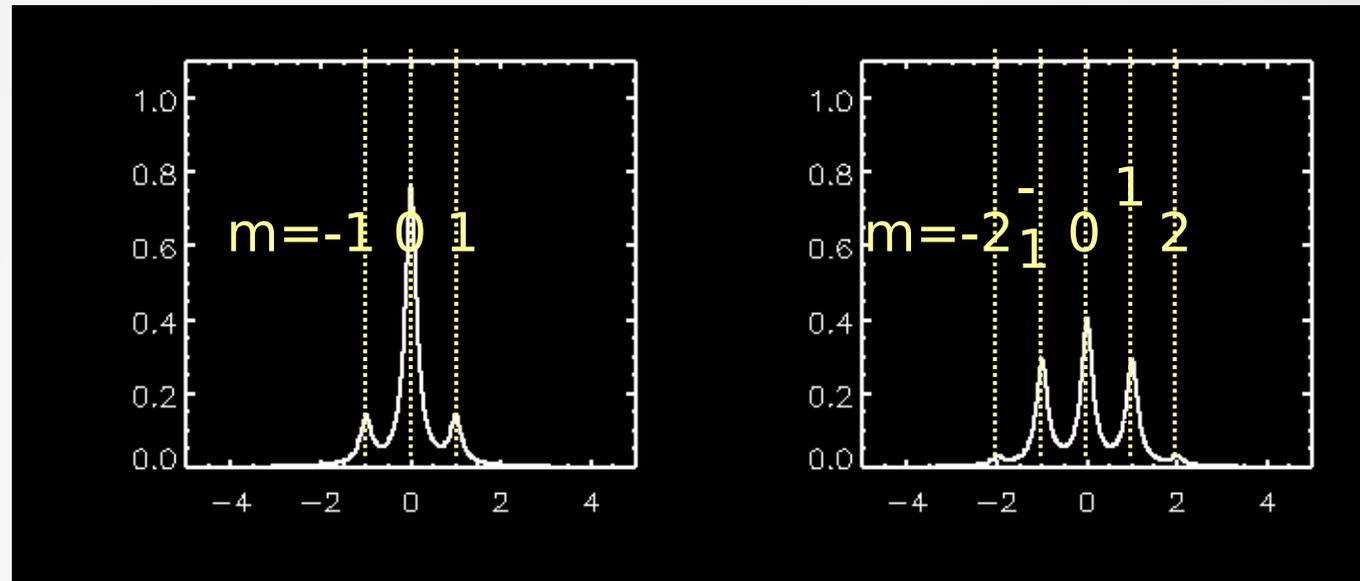


$$i = 30^\circ$$

$l=1$ mode

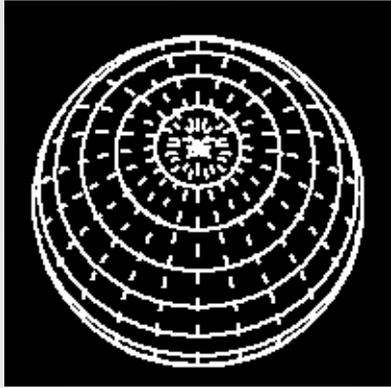


$l=2$ mode



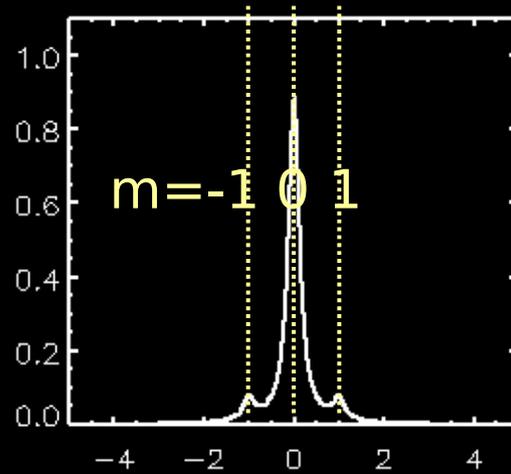
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

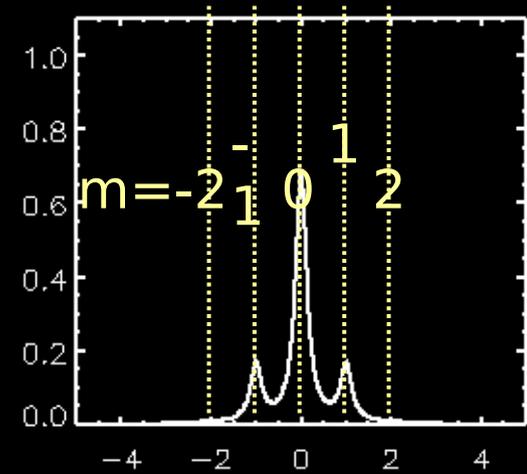


$$i = 20^\circ$$

$\ell=1$ mode

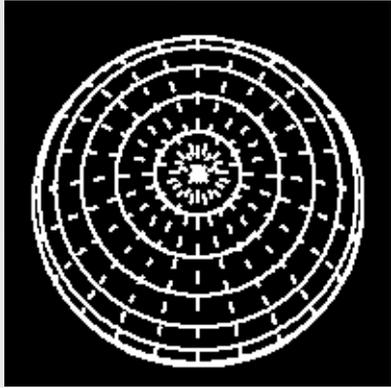


$\ell=2$ mode



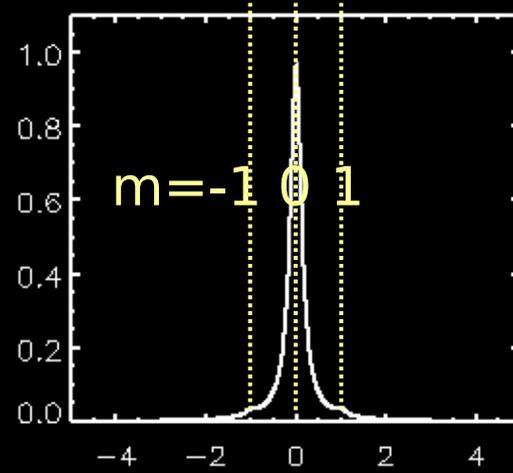
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

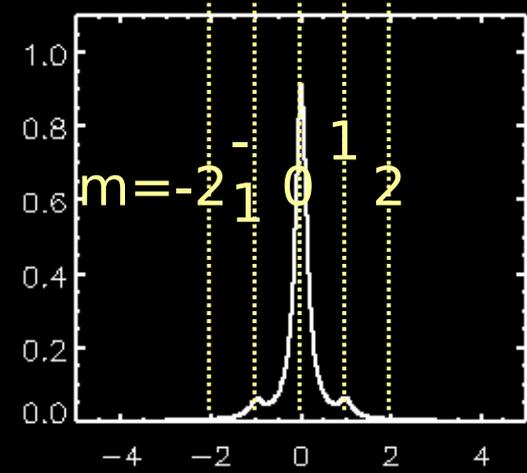


$$i = 10^\circ$$

$\ell=1$ mode

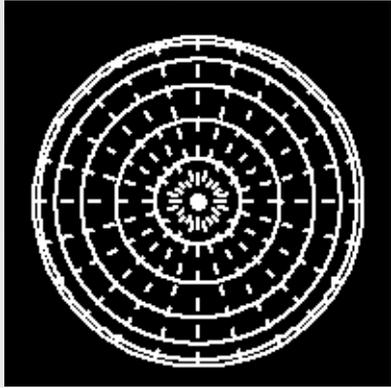


$\ell=2$ mode



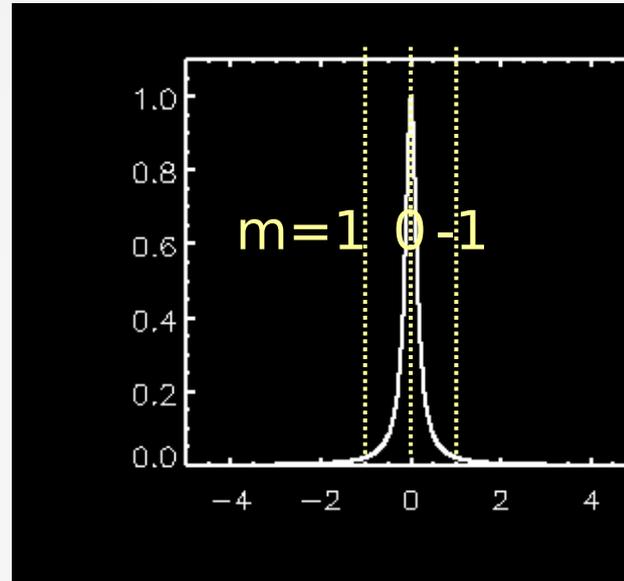
Effet de l'inclinaison i

$$\Omega = 1,0$$

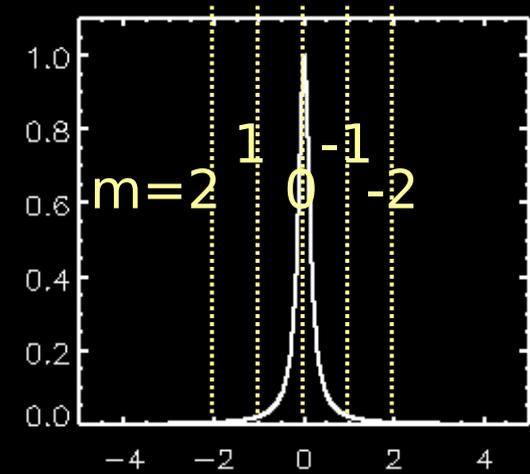


$$i = 0^\circ$$

$\ell=1$ mode



$\ell=2$ mode



$$a_{\ell m}(i) = R_{m0}^{(\ell)}(i)^2 = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} (P_{\ell}^m(\cos i))^2$$

Approche perturbative

- Valide si la rotation est faible (Soleil!)

Coriolis $\Omega \ll \omega$

$$\Omega \ll \Omega_K = \sqrt{GM/R^3}$$

Force centrifuge

- Calcul variationnel montre que la perturbation s'écrit au 1^{er} ordre :

$$\delta\nu_{nlm} = \frac{1}{2\pi I_{nl}} \int_V \left[\underbrace{\vec{\xi}_{nlm}^* \cdot (m\Omega\vec{\xi}_{nlm})}_{\text{Advection}} + \underbrace{i\vec{\xi}_{nlm}^* \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{\xi}_{nlm})}_{\text{Coriolis}} \right] \rho dV + \mathcal{O}(\Omega^2)$$

$$I_{nl} = \int_V \rho |\vec{\xi}_{nlm}|^2 dV$$

Inertie

soit

$$\delta\nu_{nlm} = \frac{m}{2\pi} \int_0^{R_*} \int_{-1}^1 \underbrace{K_{nlm}(r, \mu)}_{\text{Noyau (Kernel)}} \Omega(r, \mu) d\mu dr + \mathcal{O}(\Omega^2)$$

- Modes m=0 non affecté

Rotation stellaire

- Deux effets : Déformation **centrifuge** de l'étoile, force de **Coriolis** intervient dans les équations d'oscillations
 - Les deux brisent la symétrie sphérique
on conserve la symétrie axiale et équatoriale
- Problème devient **non séparable**
 - Modes propres de la forme $f(\vec{x}) = f(r, \theta)e^{im\phi}$
- Solutions :
 - Calculs 2D complets
 - Approximation traditionnelle pour les basses fréquences
 - Calculs perturbatifs

Rotation solide (Ledoux 1941)

- Le splitting rotationnel s'écrit alors

$$\omega_{nlm} - \omega_{nl} = -m\Omega(1 - C_{nl})$$

Constante de Ledoux

$$C_{nl} = \frac{1}{I_{nl}} \int_0^{R_*} (\xi_{nl,r}^2 - 2\xi_{nl,r}\xi_{nl,h}) \rho r^2 dr$$

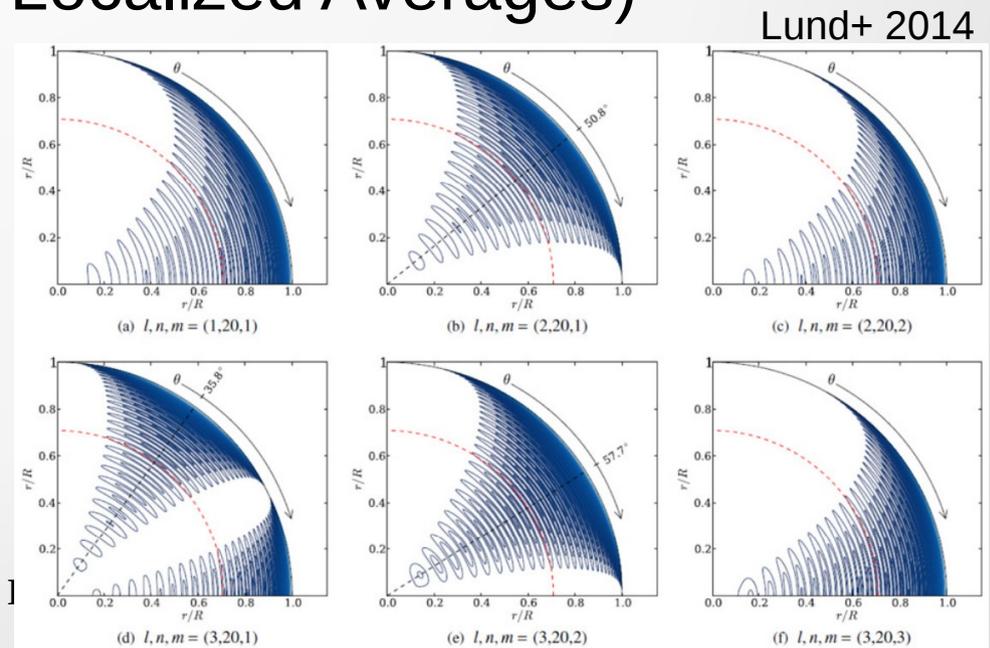
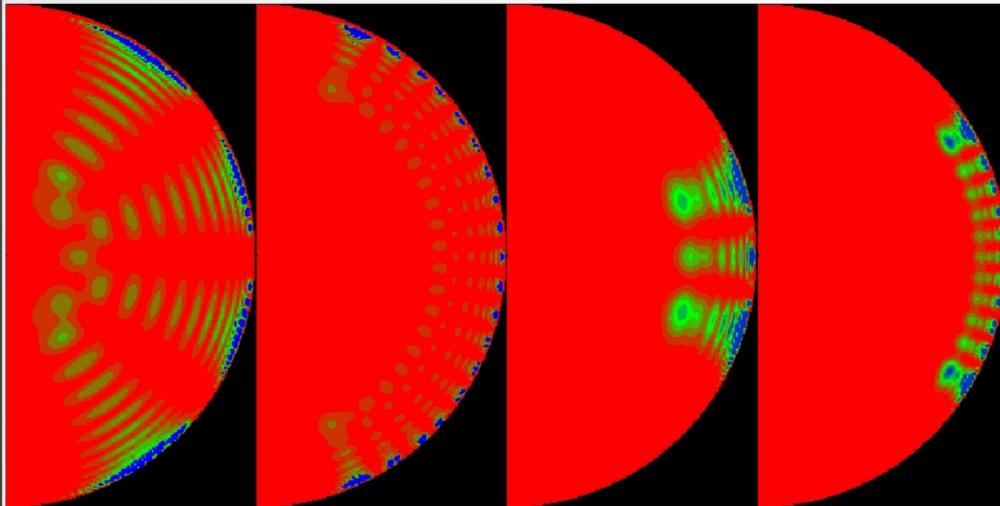
- Multiplets symétriques
- Constantes de Ledoux (ou Coriolis)
 - Modes p $C_{nl} \approx 0$
 - Modes g $C_{nl} \approx [l(l+1)]^{-1}$

Inversion des profils de rotation solaire

- Inverser la relation
$$\delta\nu_{n\ell m} = \frac{m}{2\pi} \int_0^{R_*} \int_{-1}^1 K_{n\ell m}(r, \mu) \Omega(r, \mu) d\mu dr$$
 - Profil 1D ou 2D selon le nombre de splittings mesurés
- Problème sous-contraint → régularisation
 - Méthodes RLS (Regularized Least Squares fitting)
 - Méthodes OLA (Optimize Localized Averages)

D'après Schou+ 1994

Exemples de Noyaux



RLS vs OLA

- RLS : ajustement avec une contrainte de régularité sur le profil

$$\sum \left(\frac{d_i - \int K_i \bar{\Omega} dr}{\sigma_i} \right)^2 + \lambda^2 \int (d^2 \bar{\Omega} / dr^2)^2 dr$$

Paramètre de régularisation

- OLA : on construit une combinaison linéaire de noyau pour viser une fonction de localisation cible (e.g. gaussienne)

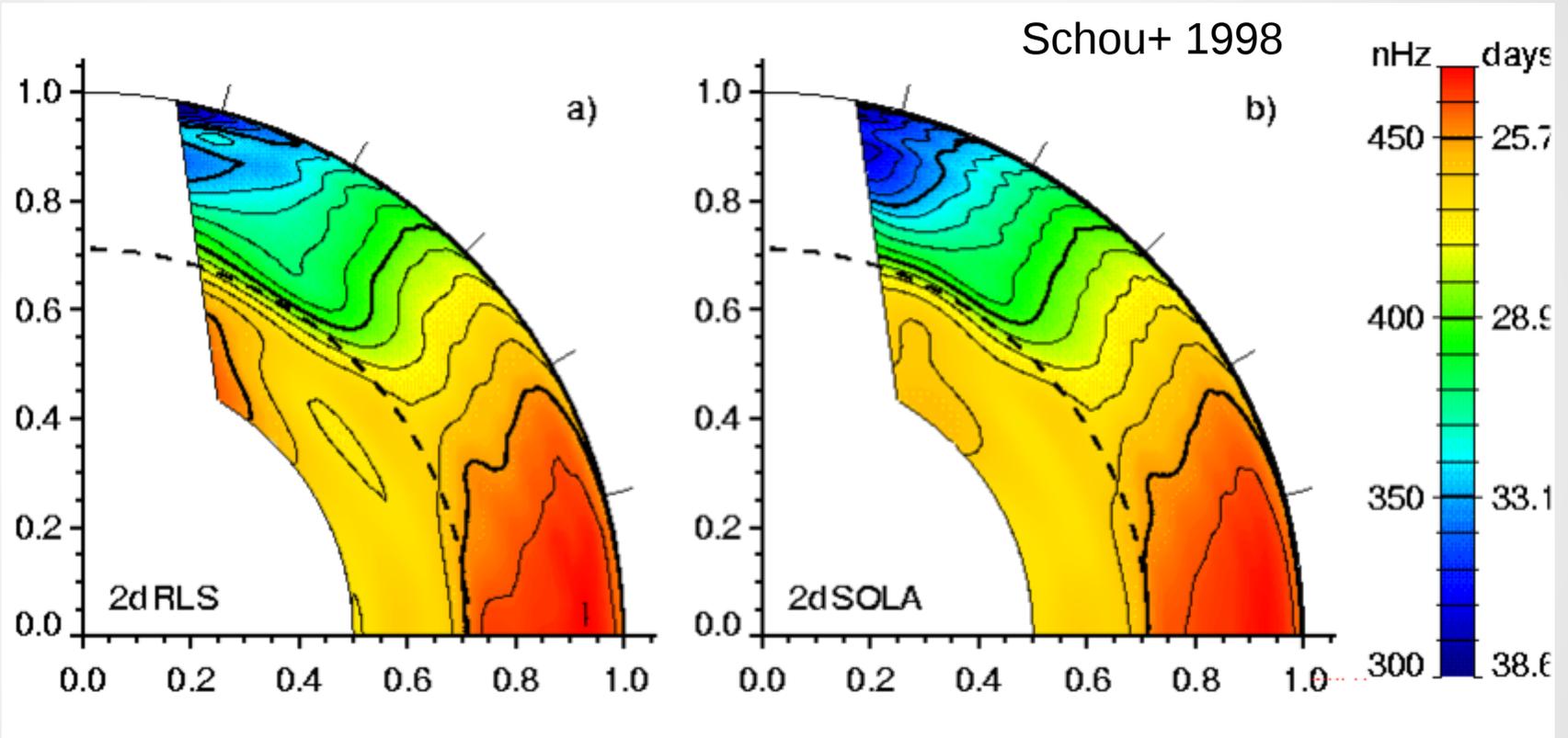
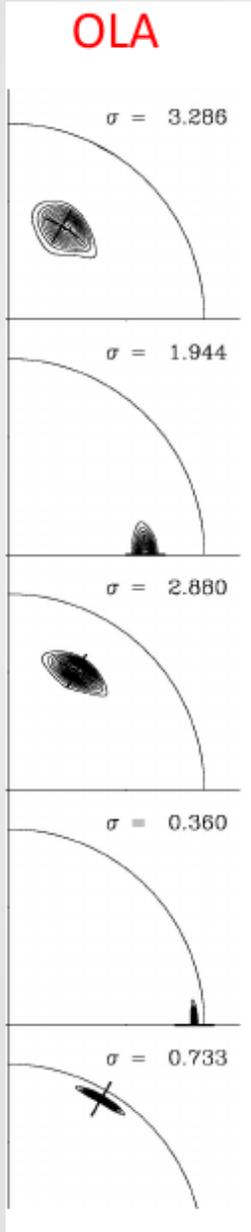
$$\mathcal{K}(r, r_0) = \sum_{i=1}^M c_i(r_0) K_i(r) \quad \bar{\Omega}(r_0) = \int \mathcal{K} \Omega dr + \sum c_i \epsilon_i$$

- Construire c_i (MOLA, SOLA...)
- Note technique : usuellement on préfère travailler sur les coefficients a et non les splittings

$$\delta \nu_{nlm} = \sum a_j(n, l) \mathcal{P}_j^l$$

- Coefficients pairs \rightarrow déformation, impairs $\rightarrow \Omega$

Application pratique au Soleil



- Application à d'autres étoiles (ex : sous-géantes avec modes mixtes → profil 1D très simple)

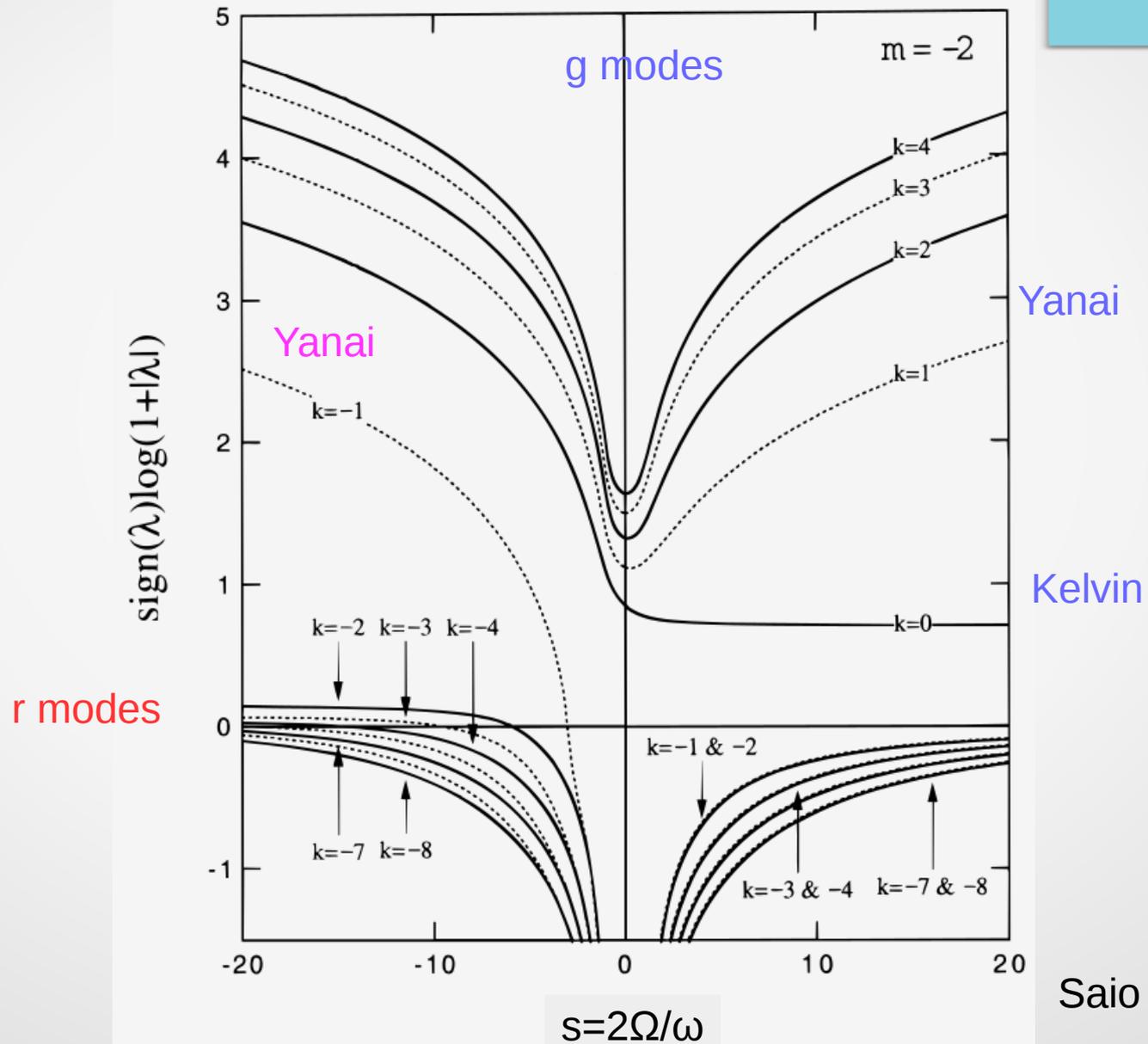
Approximation traditionnelle (TAR)

- Utile pour les modes basse fréquence (mode g) d'étoiles en rotation modérée (e.g. γ Dor)
 - Rappel: sans rotation $P_{n,\ell,m} \approx \frac{P_0(n+\epsilon)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$
- TAR = approximation de Cowling + pas de déformation + rotation uniforme + négliger Ω_θ dans la force de Coriolis
 - Le problème redevient séparable !
 - Dépendance horizontale = fonctions de Hough (et non $Y_{\ell m}$), fonctions propres du problème des marées de Laplace
 - Expression asymptotique pour les périodes des modes

$$P_{n,\ell,m}^{\text{co}}(s) \approx \frac{P_0(n+\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)}}$$

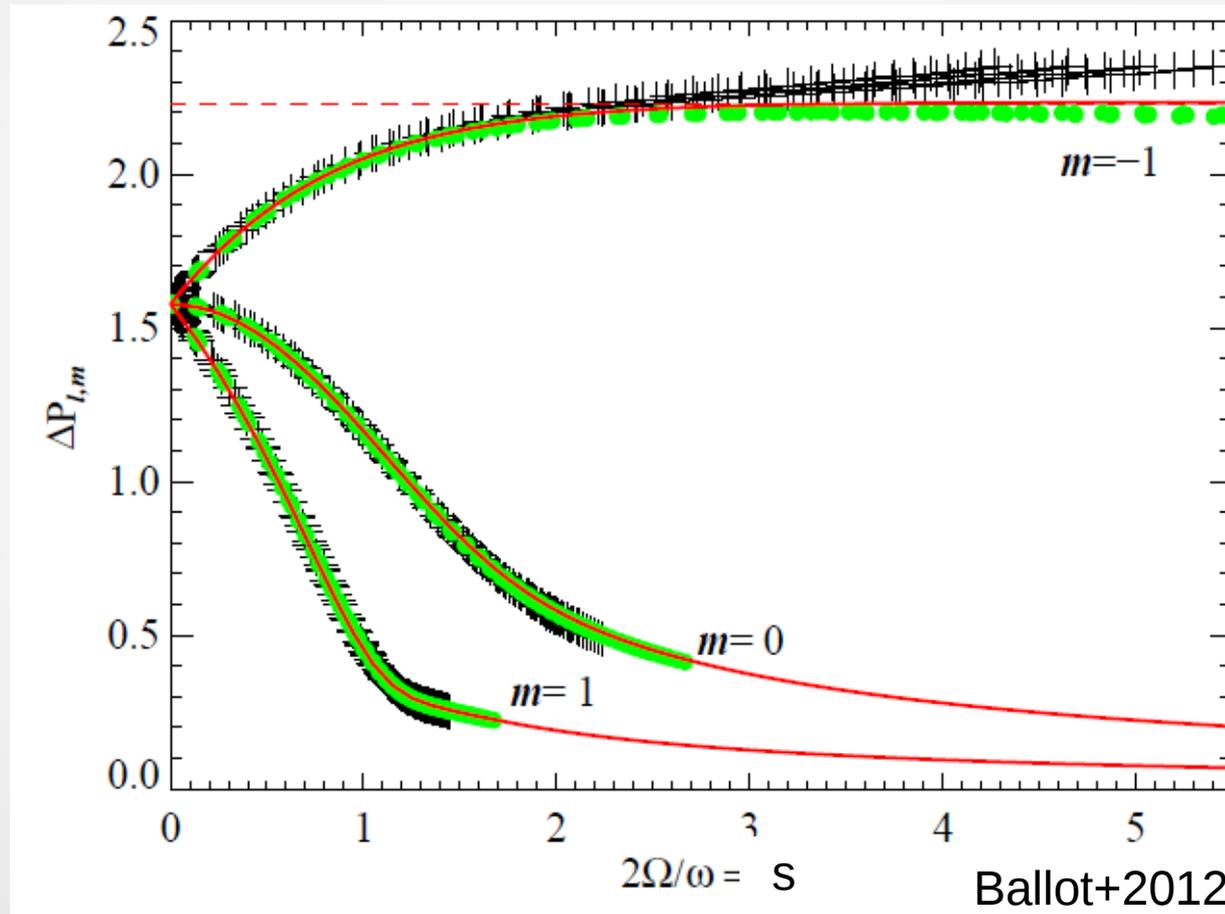
$$s = \Omega / (2\omega)$$

Approximation traditionnelle : fonctions $\lambda_{\ell m}(s)$



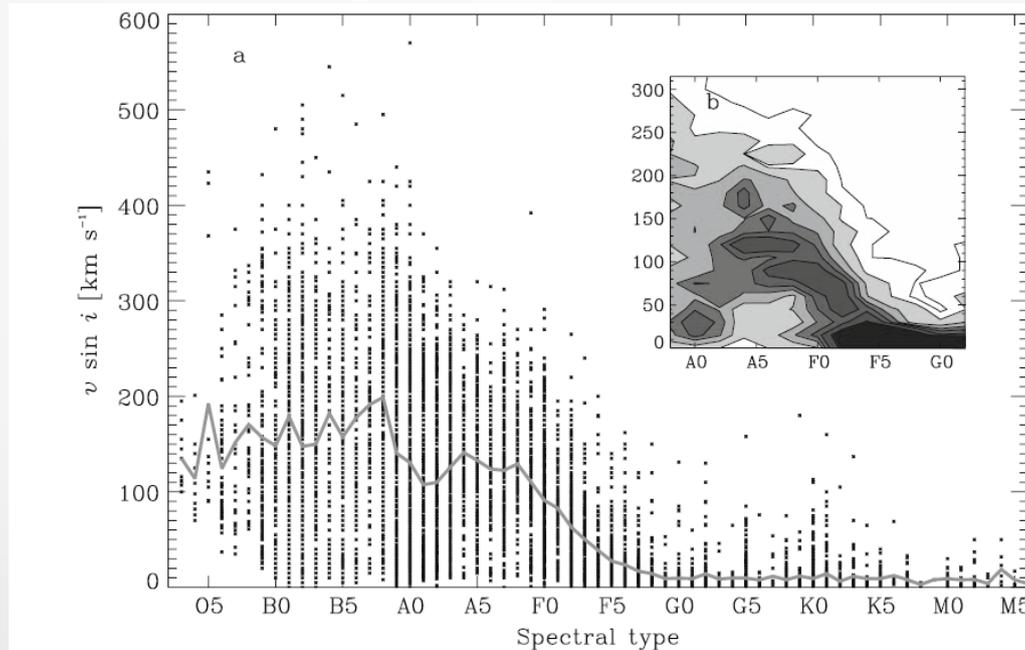
Impact de la rotation sur les modes g

Evolution des espacements en période des modes g ($\ell=1$) dans le repère en corotation

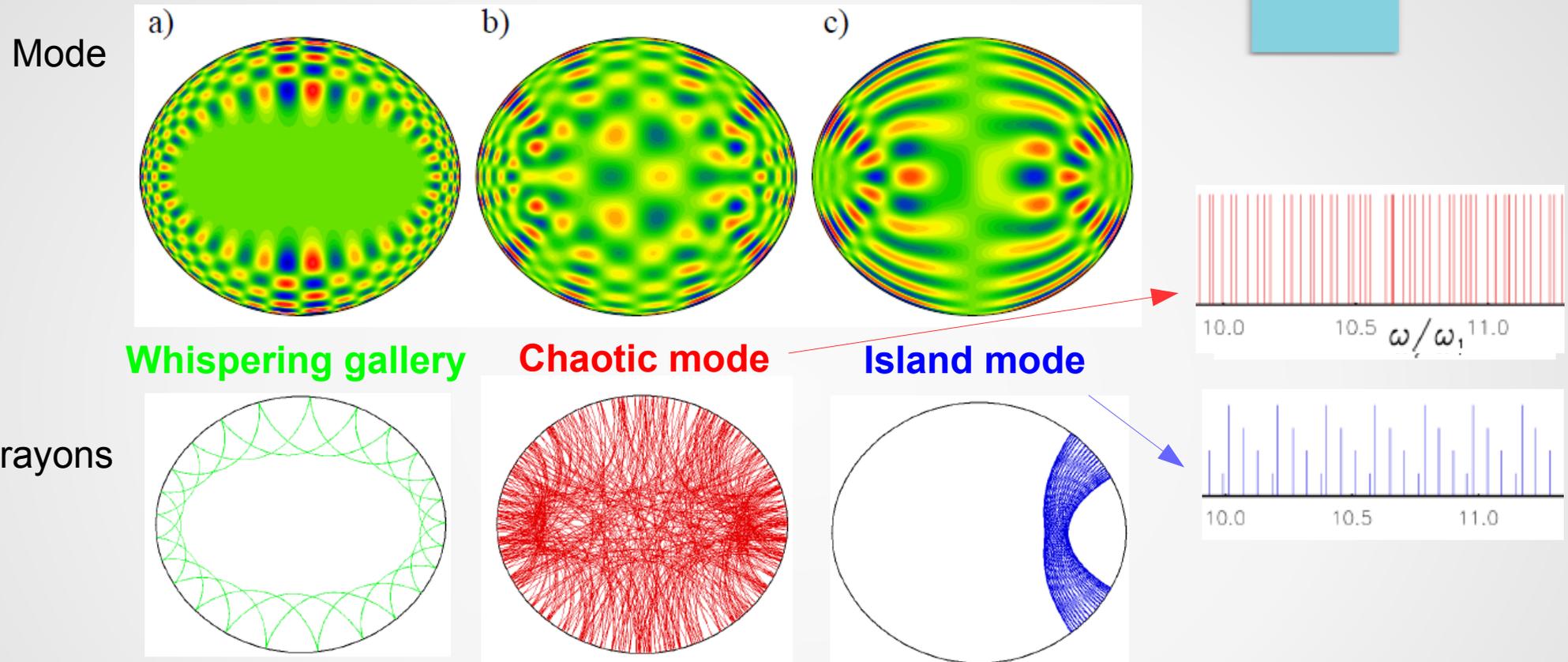


Rotation rapide

- Besoin de calculs 2D complets
 - Il n'y a généralement plus de splittings identifiables
- Calculs essentiels pour les étoiles de masse intermédiaire ou massives, car la majorité sont des rotateurs rapides



Rotation rapide : modes p

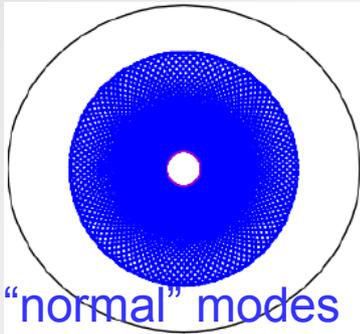


- Calculs numériques interprétés par la théorie des rayons (Lignièrès & Georgeot 2008, 2009)
- Nouvelles régularités trouvées et comprises (LG2009, Reese+2008, Pasek+ 2011, 2012, Evano et al)

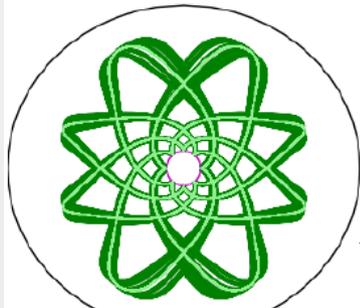
Rotation rapide : modes g

- Classification des modes avec la théorie des rayons [Prat et al 2016, Ballot et al 2012]

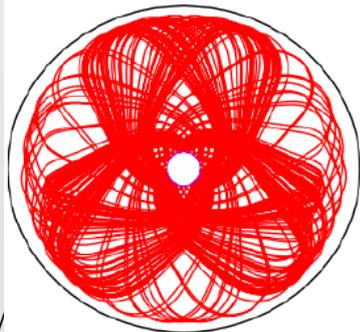
Tracés de rayons



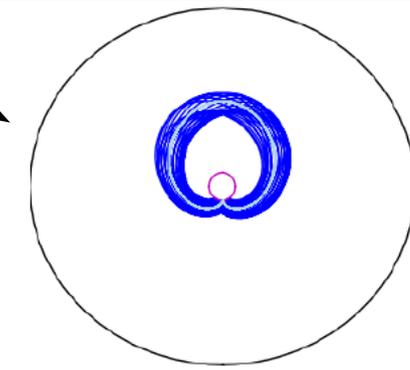
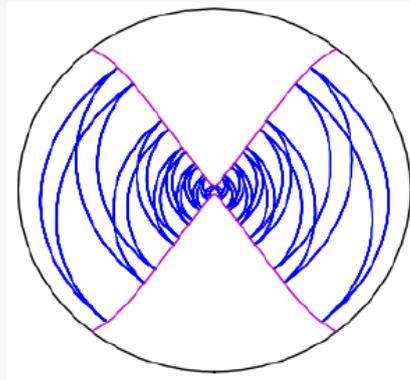
"normal" modes



Island modes



Chaotic modes SunStars - Banyuls



Rosette modes

Calculs numériques

