

Rotation and Stratification

Michel Rieutord

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie,
Toulouse, France

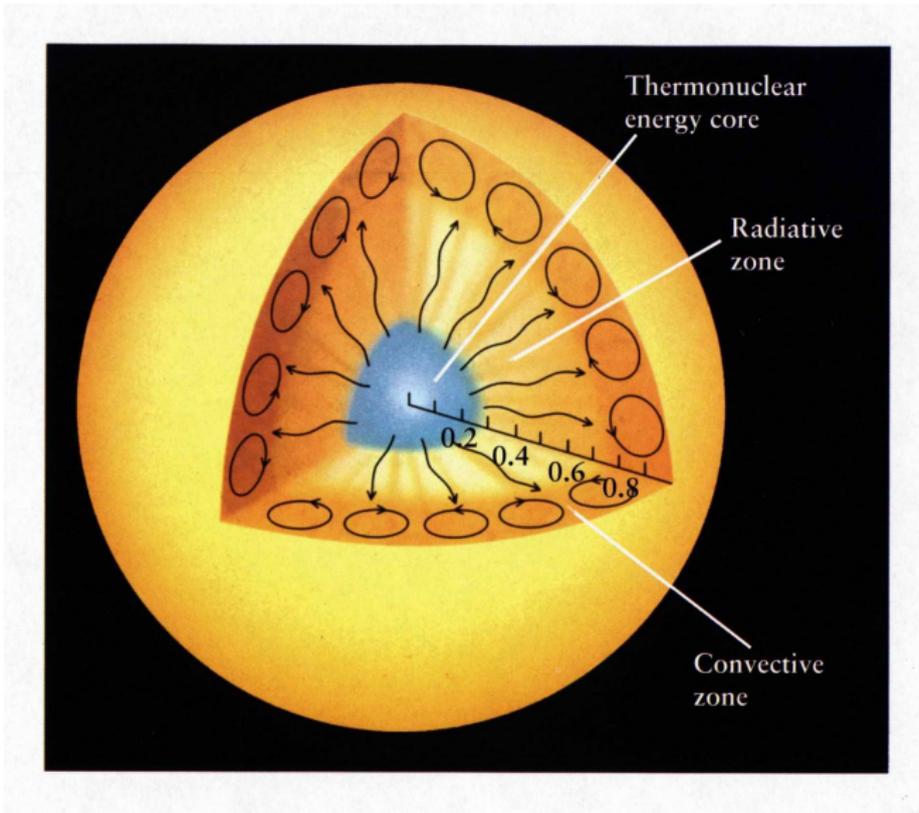
Connexions en physique solaire et physique stellaire
Banyuls - May 2018

- 1 Introduction
- 2 Zone radiative en rotation : contexte dynamique
- 3 Baroclinicité
- 4 Zone radiative en rotation : de 1924 à nos jours...

- 1 Introduction
- 2 Zone radiative en rotation : contexte dynamique
- 3 Baroclinicité
- 4 Zone radiative en rotation : de 1924 à nos jours...

- Traitement du transport dans les ZR nécessaire pour expliquer l'abondance des éléments
- Problème dont l'échelle de temps est comparable à celle du temps d'évolution stellaire
- Problème difficile longtemps polluer par l'approche d'Eddington-Sweet

- Traitement du transport dans les ZR nécessaire pour expliquer l'abondance des éléments
- Problème dont l'échelle de temps est comparable à celle du temps d'évolution stellaire
- Problème difficile longtemps polluer par l'approche d'Eddington-Sweet



- 1 Introduction
- 2 Zone radiative en rotation : contexte dynamique**
- 3 Baroclinicité
- 4 Zone radiative en rotation : de 1924 à nos jours...

$$\rho \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}}_{\text{I}} + \underbrace{\Omega^2 \vec{s}}_{\text{II}} \right) = -\vec{\nabla}P + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{III}} + \vec{F}_{\text{visc}}$$

Les termes I, II, III caractérisent le problème :

- L'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ qui assure la conservation du moment cinétique.
- L'accélération centrifuge $\Omega^2 \vec{s}$ qui génère la baroclinicité de la configuration.
- La force d'Archimède qui convertit fluctuation de densité en mouvement.

Les ondes qui se propagent à basse fréquence

Deux systèmes sont présents :

- Ondes inertielles dues à Coriolis
- Ondes de gravité dues à Archimède

Ensemble elles forment les ondes gravito-inertielles ; on y distingue deux sous-groupes :

- les ondes de Rossby
- les ondes baroclines

Elles existent même si $\rho = \text{Cte}$.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \rho \vec{v} = -\vec{\nabla} P \\ \text{Div} \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Si $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})e^{i\omega t}$ alors

$$\frac{\omega}{2\Omega} \leq 1$$

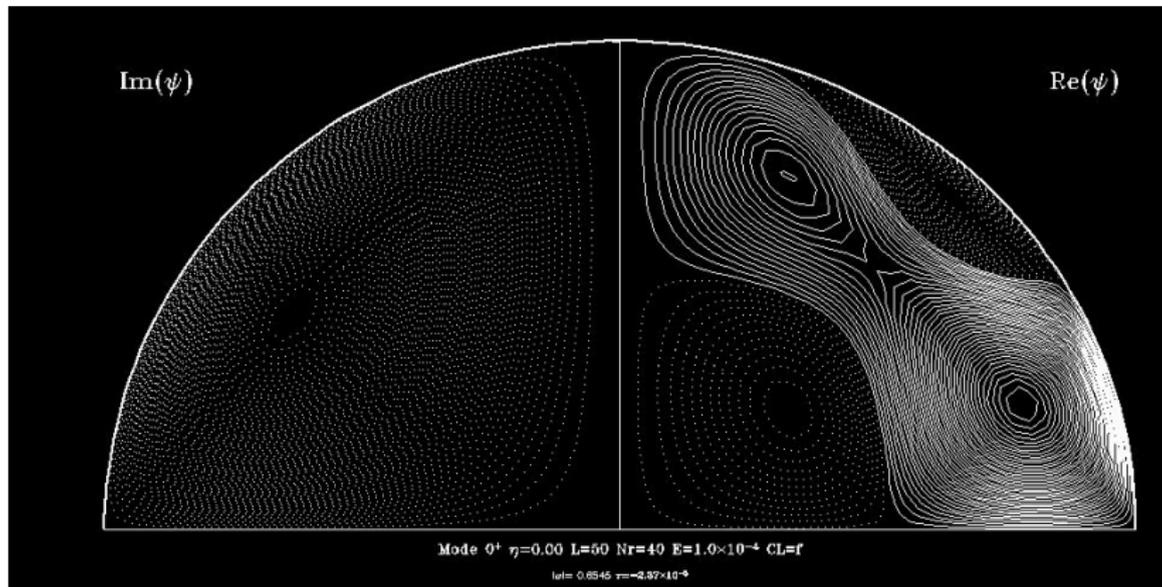
Ce sont des modes basse fréquence qui vérifient :

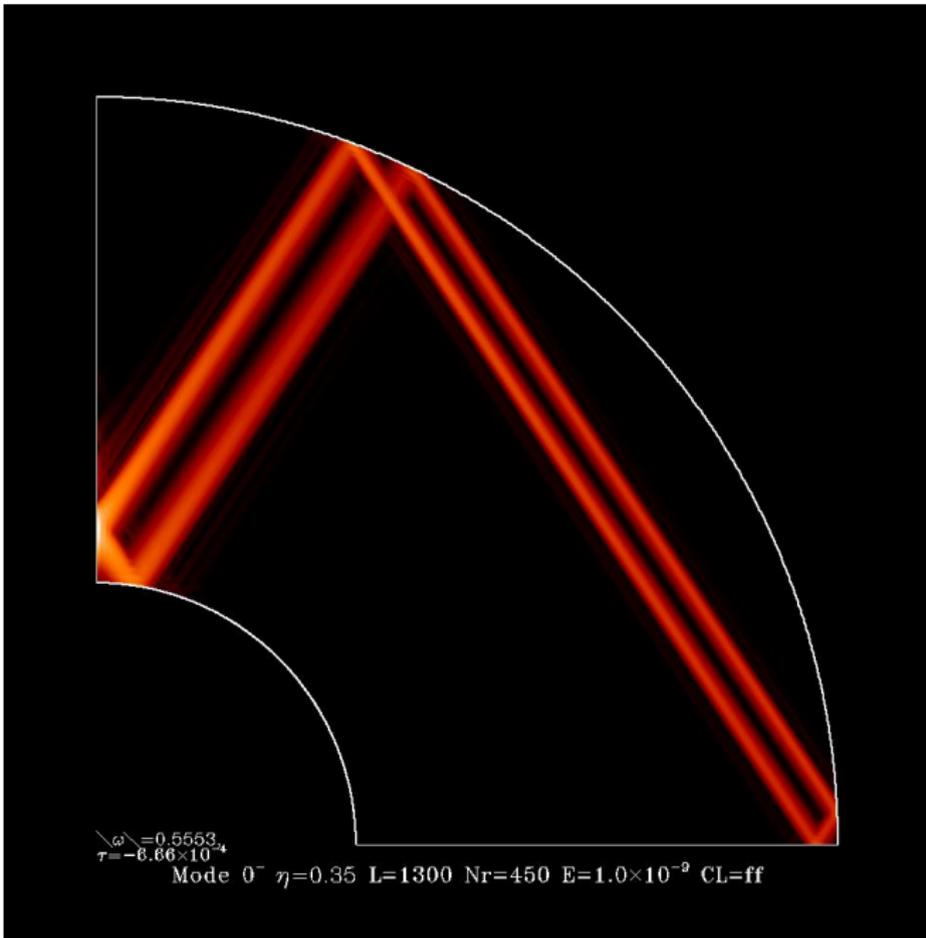
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\frac{4\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

qui est l'équation de Poincaré.

L'équation de Poincaré est hyperbolique spatialement et possède donc des solutions singulières apparaissant comme des couches de cisaillement dans un fluide visqueux.

Exemples :





La fréquence de Brunt-Väisälä :

c'est la fréquence caractéristique de l'oscillation d'une particule fluide en environnement stratifié stable ; elle mesure l'intensité de la force d'Archimède :

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dr} - \frac{dT_{ad}}{dr} \right) = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = \frac{g}{\gamma} \frac{d \ln(P/\rho^\gamma)}{dr} \propto g \frac{dS}{dr}$$

Modes de gravité à l'approximation de Boussinesq :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \delta p + \frac{\delta \rho}{\rho} \vec{g} \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_0 = 0 \\ \text{Div} \delta \vec{v} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

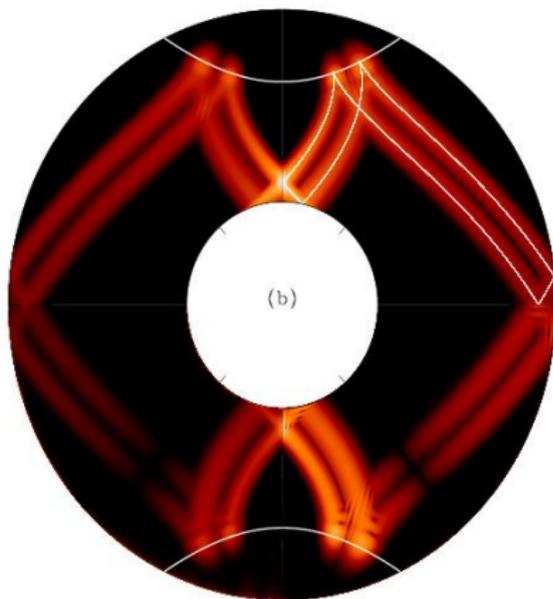
avec $\frac{\delta \rho}{\rho} = -\alpha \delta T$. Pour les mouvements périodiques on montre que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

c'est-à-dire que là encore les fluctuations de pression obéissent à l'équation de Poincaré hyperbolique, car comme pour les modes inertiels, les modes sont basse fréquence, i.e. $\omega < N$.

Les ondes gravito-inertielles

La combinaison des deux systèmes d'ondes donne naissance aux **modes gravito-inertiels** :



$$\omega=0.755, \tau=-3.854 \times 10^{-3}, N=1.0$$

From Dintrans et al. (1999)



Elles vérifient les mêmes équations dynamiques que les ondes inertielles mais on leur impose une contrainte supplémentaire.

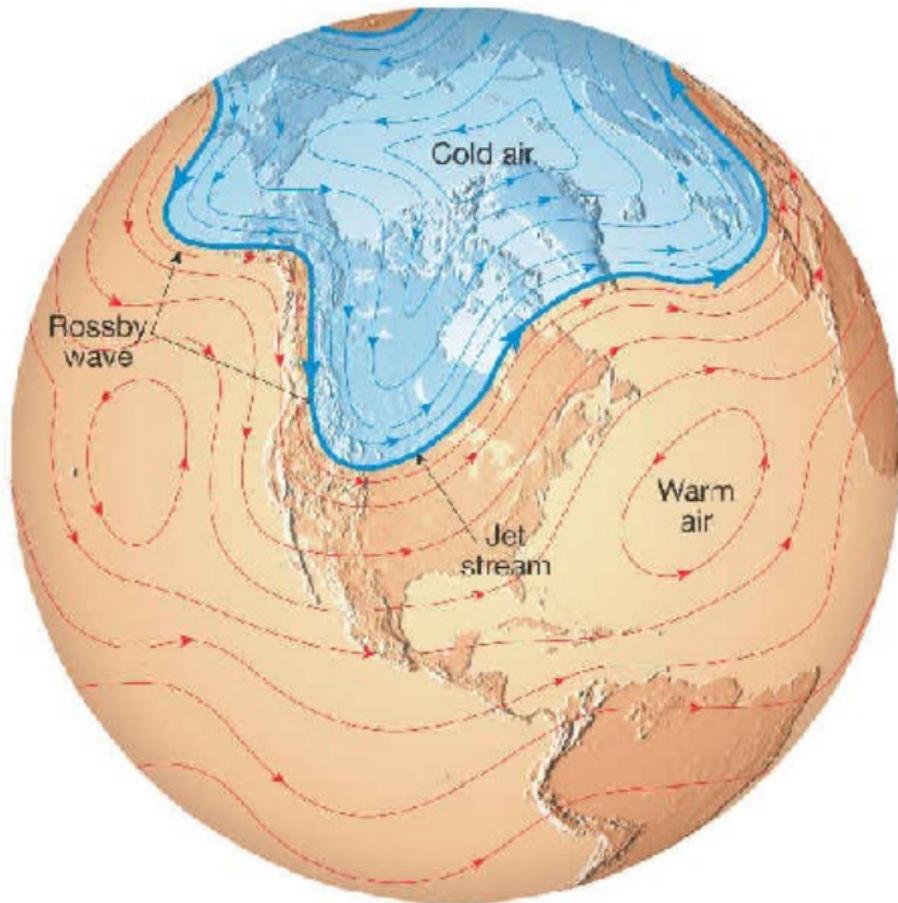
Exemples :

- Dans l'atmosphère terrestre $v_z \ll v_x, v_y$
- Les modes r de Papaloizou et Pringle (1978) où $v_r = 0$

$$v_\theta = Ar^m (\sin \theta)^{m-1} \sin(m\phi + 2\Omega t / (m + 1))$$

$$v_\phi = Ar^m (\sin \theta)^{m-1} \cos \theta \cos(m\phi + 2\Omega t / (m + 1))$$

$$m = 1, 2, \dots$$



- 1 Introduction
- 2 Zone radiative en rotation : contexte dynamique
- 3 Baroclinicité**
- 4 Zone radiative en rotation : de 1924 à nos jours...

Condition d'existence d'une solution statique

$$-\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi = \vec{0} \quad \text{Equilibre mécanique}$$

$$\text{Div}(\chi\vec{\nabla}T) = 0 \quad \text{Equilibre thermique}$$

$$f(P, \rho, T) = 0 \quad \text{Equation d'état}$$

$\vec{\nabla}\Phi$ est prescrit ou éventuellement $\Delta\Phi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2$.

Pour que l'équilibre mécanique soit possible, il faut

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P\right) = \vec{0} \iff \vec{\nabla}\rho \wedge \vec{\nabla}P = \vec{0}$$

i.e. les normales aux isobares et isochores sont confondues.

or l'équation d'état impose

$$\frac{\partial f}{\partial P}dP + \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial T}dT = 0$$

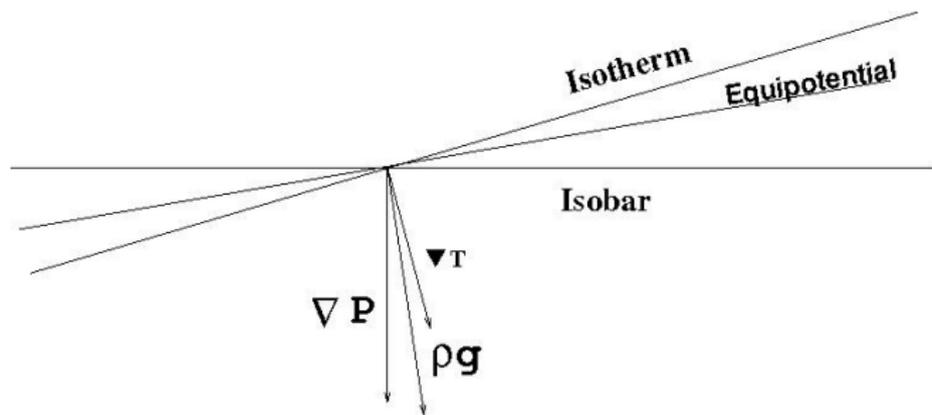
Donc si les isobares et les isochores sont confondues alors sur une telle surface :

$$\frac{\partial f}{\partial T}dT = 0$$

et donc

- soit $\frac{\partial f}{\partial T} = 0$ i.e. $f(P, \rho) = 0$ et le fluide est barotrope
- soit $dT = 0$ et les isobares sont aussi des isothermes (accessoirement des équipotentiellles).

En général, $\frac{\partial f}{\partial T} \neq 0$ et les isothermes sont fixées par l'équation de l'équilibre thermique ; elles sont en général différentes des isobares et donc inclinées par rapport à elles.



L'équation de la vorticité

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) = \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{\omega}$$

montre que la baroclinicité est source de vorticité en générant un couple.

Exemple du double vitrage

Reprenons les équations du mouvement d'un fluide à l'approximation de Boussinesq en supposant les mouvements de petite amplitude :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla}\delta P + \delta\rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{v} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla}T_{eq} = \kappa\Delta\delta T \\ \text{Div}\vec{v} = 0 \\ \frac{\delta\rho}{\rho} = -\alpha\delta T \end{array} \right. \quad (3)$$

Dans notre cas $\vec{\nabla}T_{eq} = \vec{0}$ car à l'équilibre la température est constante.

Exemple du double vitrage

Supposons les plaques infinies séparées d'une distance d avec la plaque chaude (resp. froide) en $x = -d/2$ (resp. en $x = d/2$).
L'équilibre thermique conduit à

$$\delta T(x) = -(T_c - T_f) x/d$$

$$\delta \rho = \frac{\alpha(T_c - T_f)\rho_0}{d} x$$

Donc le champ de vitesse doit satisfaire à

$$\mu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} \delta P = \frac{\alpha(T_c - T_f)\rho_0 g}{d} x \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \text{Div} \vec{v} = 0$$

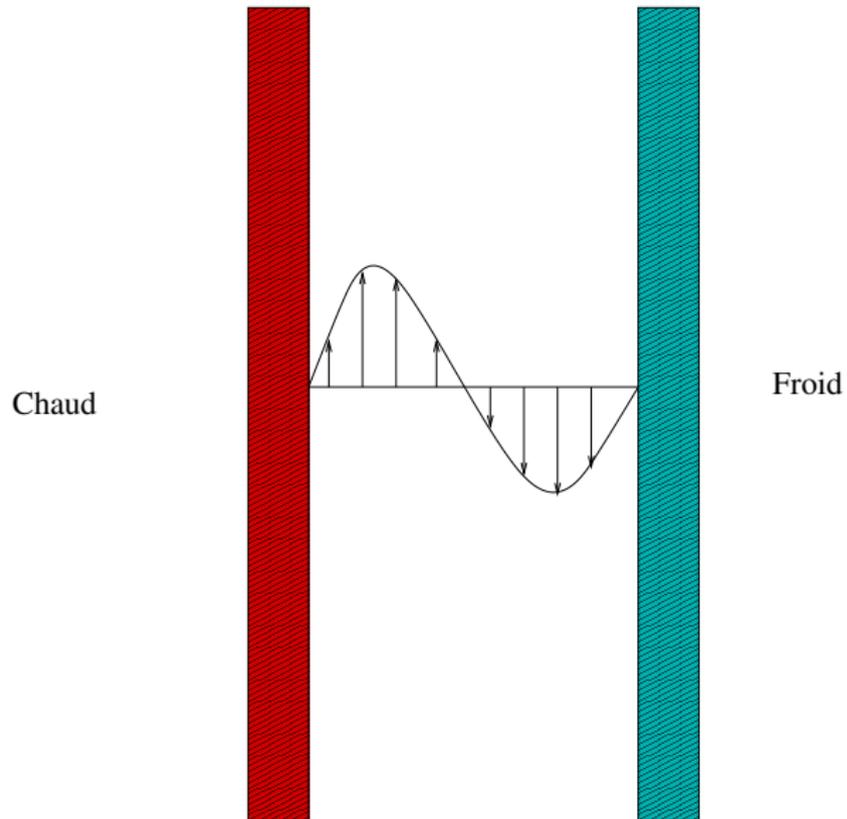
Exemple du double vitrage

Ici le couple barocline est équilibré par le couple visqueux :

$$\mu\Delta\vec{\omega} = \frac{\alpha(T_c - T_f)\rho_0 g}{d} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

On résout facilement ce système qui donne un champ de vitesse parallèle aux plaques (vitres) :

$$v_z(x) = \frac{\alpha(T_c - T_f)\rho_0 g}{24\mu d} x(d^2 - 4x^2) \quad (4)$$



Exemple 2 : le vent thermique

Imaginons une situation barocline dans un repère en rotation où les vitesses sont suffisamment faibles pour que le problème soit linéaire.

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta P - \alpha \delta T \vec{g}$$

Ici le couple barocline est équilibré par le couple issu de la force de Coriolis :

$$\overline{\text{Rot}}(2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \overline{\text{Rot}}(\alpha g \delta T \vec{e}_z)$$

Supposons le champ de température donné par :

$$\delta T = \delta T_0 \sin(kx)$$

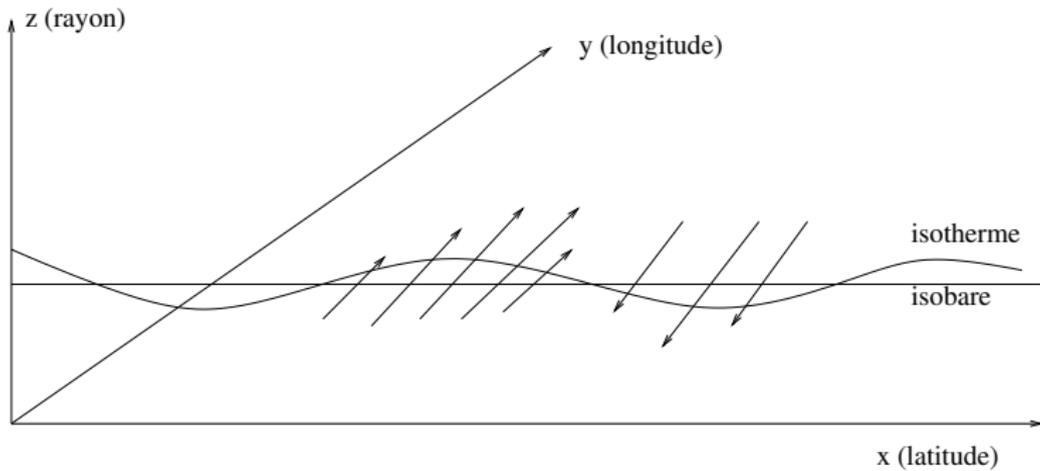
(modulation en latitude)

La résolution de ces équations donne un champ de vitesse

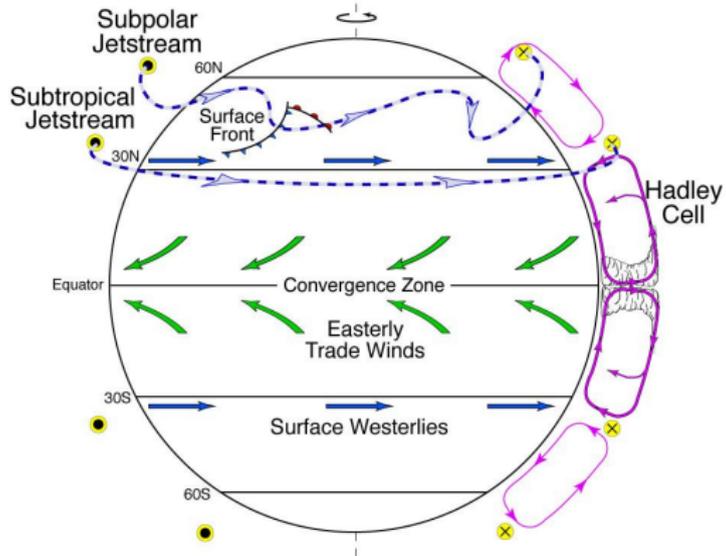
$$\vec{v}_{\text{th}} = V_0 k z \cos kx \vec{e}_y$$

$$V_0 = \frac{\alpha g \delta T_0}{2\Omega}$$

Dans le repère inertiel, la distribution de moment cinétique a changé à cause du couple barocline : rotation différentielle en rayon z et en latitude x .



Latitude structure of the circulation



- 1 Introduction
- 2 Zone radiative en rotation : contexte dynamique
- 3 Baroclinicité
- 4 Zone radiative en rotation : de 1924 à nos jours...**

Evolution des idées depuis 1924

- Le théorème de Von Zeipel (1924)
- Les errements d'Eddington-Sweet et de la littérature
- Busse 1981 : “Do Eddington-Sweet Circulations exist ?”
- Le modèle de Zahn 1992
- Quelques remarques supplémentaires

Le théorème de Von Zeipel 1924

Von Zeipel montre que l'équilibre hydrostatique d'une étoile en rotation rigide n'est pas compatible avec l'équilibre radiatif. Il montre que si cela était vrai on aboutit à un paradoxe.

Soit $\Phi = \phi_g + \phi_c$ le potentiel total ;

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho \quad \text{et} \quad \phi_c = -\frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

On a vu que si la solution statique existe, alors

$$P \equiv P(\Phi), \quad \rho \equiv \rho(\Phi), \quad T \equiv T(\Phi)$$

i.e. isobares, isochore, isothermes et équipotentiellles sont confondues.

Le théorème de Von Zeipel 1924

L'équilibre radiatif dans une zone radiative sans réaction nucléaire exige

$$\text{Div}(\chi(\Phi)\vec{\nabla}T(\Phi)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \chi T' \Delta\Phi + (T'' + \chi' T')(\vec{\nabla}\Phi)^2 = 0$$

$$\implies \underbrace{\chi(\Phi)T'(\Phi)(4\pi G\rho(\Phi) - 2\Omega^2)}_{\text{Cte}} + \underbrace{(T''(\Phi) + \chi'(\Phi)T'(\Phi))}_{\text{Cte}} \underbrace{(\vec{\nabla}\Phi)^2}_{\text{nonCte}} = 0$$

$\vec{\nabla}\Phi$ n'est autre que la gravité effective qui n'est pas constante sur une équipotentielle ($\vec{g}_{\text{pole}} \neq \vec{g}_{\text{eq}}$).

Von Zeipel conclut très justement qu'il est impossible d'obtenir une solution statique.

En 1925 Vogt et Eddington émettent indépendamment l'idée de l'existence d'une circulation méridienne...

Les idées de Vogt et Eddington ont été mises en musique par Sweet 1950 et voici un raisonnement qu'on trouve dans la littérature depuis cette époque (avant 1992) :

Puisque $\text{Div}(\chi \vec{\nabla} T) \neq 0$ et qu'on recherche une solution stationnaire alors le champ de vitesse est tel que

$$\rho c_v (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T) = \text{Div}(\chi \vec{\nabla} T)$$

On en déduit la vitesse radiale méridienne :

$$\rho c_v v_r \frac{\partial T}{\partial r} \simeq \text{Div}(\chi \vec{\nabla} T)$$

tandis que v_θ est dérivé de la conservation de la masse :

$$\text{Div}(\rho \vec{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) = 0$$

Problème : un tel champ de vitesse n'est pas issu d'un champ de force, **la conservation du moment cinétique n'est pas assurée !**
Problème pointé dès 1941 par Randers. Contourné par Mestel en 1961 grâce au champ magnétique. Mais généralement ignoré faute de savoir le traiter ; par exemple

- Rose 1998 *Advance Stellar Physics* propose la méthode Sweet.
- Kippenhahn et Weigert 1990 *Stellar structure and evolution* notent le problème de conservation de moment cinétique et l'existence de solutions sans circulation méridienne mais ne font pas de lien entre les 2 propriétés.

Remarque : les solutions avec un profil de rotation différentielle éliminant la nécessité d'une circulation méridienne ont été remarquées par Schwarzschild 1947, Baker and Kippenhahn 1959 et Roxburgh 1964. Mais ces solutions étaient jugées 'irréalistes' car venant de nulle part et peut-être même pas stable....
Schatzman et Praderie 1985 *Les étoiles* a les mêmes problèmes.

Busse 1981 : “Do Eddington-Sweet Circulations exist ?”

Poser la question c'est y répondre ...

Quelques remarques de bon sens :

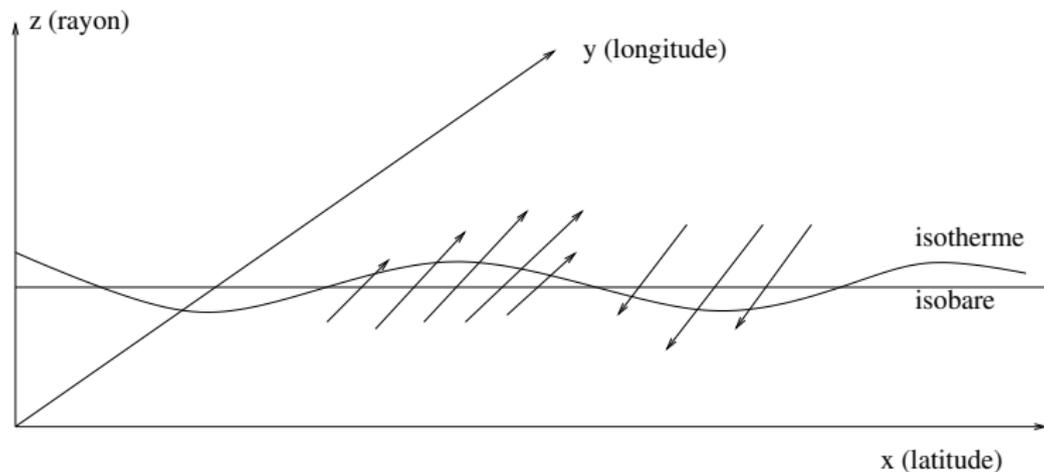
- La conservation du moment cinétique bloque toute circulation méridienne, s'il n'y a pas d'autres forces en jeu.
- Si la situation est bloquée mécaniquement, elle évolue thermiquement : Si l'équilibre radiatif est violé, le champ de température change...

Cela montre que nous sommes face à un problème de condition initiales : on part d'une solution en déséquilibre thermique et

- soit on arrive à une solution universelle après atténuation d'un transitoire
- soit le transitoire dure trop longtemps....

Etude du transitoire avec un petit modèle cartésien

Suivons donc Busse 1981 (GAFD 17, p215) :



- Dans cette géométrie nous connaissons la solution stationnaire du vent thermique.
- Busse pose la question de savoir comment elle s'établit à partir de conditions initiales arbitraires :
- Quel écoulement apparaît et quelles échelles de temps le gouvernent ?

Voici la réponse du modèle de Busse :

si

$$\vec{v} = \left\{ V(x, z)\vec{e}_y + \overrightarrow{\text{Rot}}(\Psi(x, z)\vec{e}_y) \right\} e^{\lambda t}$$

(on choisit des solutions axisymétriques) ; $\lambda = -\sigma + i\omega$, alors

$$\left[(\omega^2 + 2i\omega\sigma)\Delta - 4\Omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 - \frac{i\kappa}{\omega}\Delta \right) \right] \Psi = 0$$

dont les solutions sont les modes gravito-inertiels

.../...

Etude du transitoire avec un petit modèle cartésien

x : latitude

z : rayon

$$\Psi = \sin(n\pi(z/d + 1/2)) \cos(mkx)$$

$$V = \frac{2\Omega n\pi}{i\omega} \cos(n\pi(z/d + 1/2)) \cos(mkx)$$

$$\theta = \frac{\beta mk}{i\omega\rho_0} \sin(n\pi(z/d + 1/2)) \sin(mkx)$$

$$\omega^2 = \frac{4\Omega^2 n^2 + N^2(mkd/\pi)}{n^2 + (kd/\pi)^2}$$

$$\sigma = \kappa k^2 m^2 \frac{N^2}{2\omega^2}$$

et les modes baroclines :

Etude du transitoire avec un petit modèle cartésien

x : latitude

z : rayon

$$\theta = \sin(n\pi(z/d + 1/2)) \sin(mkx)$$

$$V = \frac{mk\rho\alpha gd}{2\Omega k\pi} \cos(n\pi(z/d + 1/2)) \cos(mkx)$$

$$\Psi = O(\kappa/d^2)$$

$$\omega^2 = 0$$

$$\sigma = \frac{\kappa}{d^2} \frac{n^2\pi^2 + m^2k^2}{1 + N^2/4\Omega^2 (mk/n\pi)^2}$$

auquel on rajoute les modes géostrophiques et purement thermique.

Etude du transitoire avec un petit modèle cartésien

La complétude de la base de Fourier entraîne la complétude de la base modale et l'unicité de la décomposition de toute condition initiale.

L'évolution du transitoire est donc contrôlée par les modes les moins amortis, i.e. de plus grande échelle.

Pour obtenir un modèle sphérique Busse fait la correspondance :

$$d \sim R, \quad k \sim 2/R$$

Donc 2 échelles de temps caractérisent l'amortissement du transitoire :

$$\sigma_{GI} \sim \frac{4\kappa}{R^2} \quad \sigma_{\text{baro}} \sim \frac{(\pi^2 + 4)\pi^2}{4} \eta \frac{\kappa}{R^2} \sim 35\eta \frac{\kappa}{R^2}$$

$$\text{où } \eta = \frac{4\Omega^2}{N^2} < 1.$$

Deux temps caractéristiques apparaissent :

- $T_{KH} = \frac{R^2}{\kappa}$ temps de diffusion thermique ou de Kelvin-Helmholtz
- $T_{ED} = T_{KH}/\eta$ temps d'Eddington-Sweet

Pour les rotateurs rapides :

$$\eta \sim 1$$

et le régime stationnaire est atteint au bout d'un temps de Kelvin-Helmholtz.

Pour les rotateur lent, $\eta \ll 1$, par exemple pour le soleil, $\eta \sim 2 \cdot 10^{-4}$, les modes baroclines sont très long à disparaître et les conditions initiales jouent un rôle crucial.

Pendant ce transitoire a-t-on une circulation méridienne ?

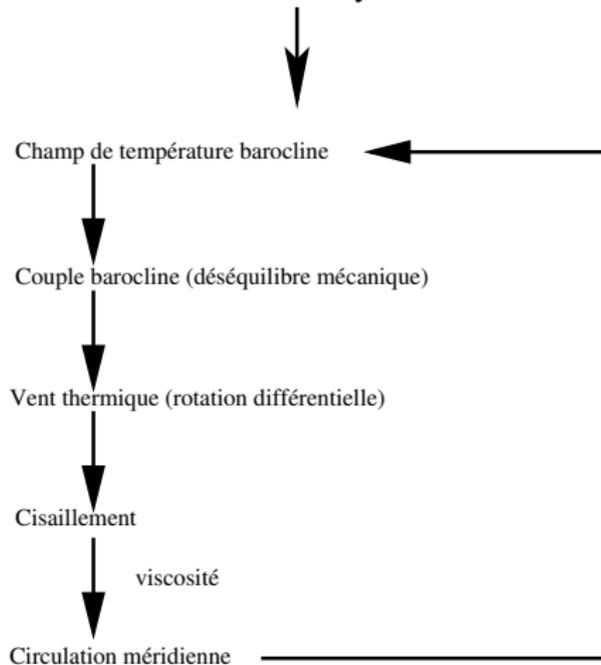
- oui essentiellement grâce aux modes gravito-inertiels mais elle disparaît après quelques T_{KH} .
- si $\eta \ll 1$, les modes baroclines survivent mais la circulation méridienne qu'ils engendrent est très faible :

$$(v_r, v_\theta) \sim \frac{\kappa}{\Omega R^2} v_\phi \ll v_\phi$$

Pour terminer :

- Busse considère les couche d'Ekman comme source possible de circulation méridienne mais il montre qu'elle est encore plus faible et termine par une discussion de stabilité de l'écoulement barocline.
- en résumé : Busse montre qu'un modèle cohérent d'état stationnaire pour un fluide stratifié en rotation doit fonctionner de la façon suivante :

Géométrie du système



Et Eddington-Sweet ?

”... there are no special limits in which the Eddington-Sweet theory provides a correct solution of the basic equations”.

Busse 1982, ApJ, **259**, 759

C'est la mise en œuvre de ce qui précède dans le cadre de modèles d'étoiles unidimensionnels.

Idée de base : si rotation différentielle il y a, elle est principalement radiale car pour une turbulence en fluide stratifié, la diffusion horizontale \gg diffusion verticale.

Le modèle résout 3 équations :

- Equilibre advection-diffusion du moment cinétique :

$$\frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 U \Omega) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 v_h \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = 0$$

où $v_r = U(r)P_2(\cos \theta)$

- Baroclinicité

$$-\frac{\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P}{\rho^2} = \vec{\nabla} \Omega^2 \wedge s \vec{e}_s$$

- Déséquilibre thermique

$$\text{Div}(\chi \vec{\nabla} T) + \rho \varepsilon = \rho c_v \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$$

ou

$$U(r) = \frac{L}{Mg} \frac{P}{C_p \rho T} \left(\frac{E_\Omega + E_\mu}{\nabla_{\text{ad}} - \nabla} \right)$$

Zahn donne

$$E_{\Omega} = 2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \frac{\tilde{g}}{g} + \mathcal{L}(d\Omega/dr) \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{g}}{g} = \frac{4}{3} \left(\frac{\Omega^2 r^3}{GM} \right)$$

Alors si la rotation est solide on en déduit :

$$U(r) = K \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \frac{\tilde{g}}{g}$$

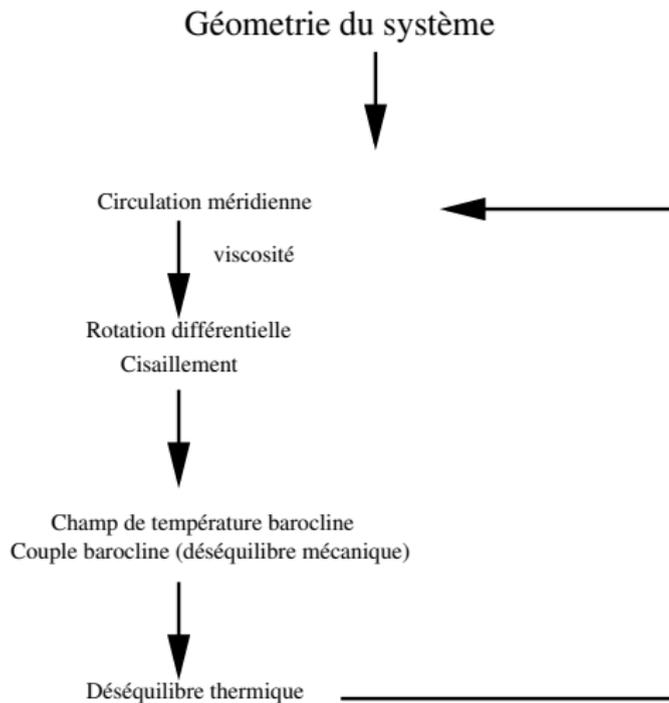
the Gratton-Öpik term, qui rappelle la formule de Sweet (1950)

$$U(r) = K \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \frac{\tilde{g}}{g}$$

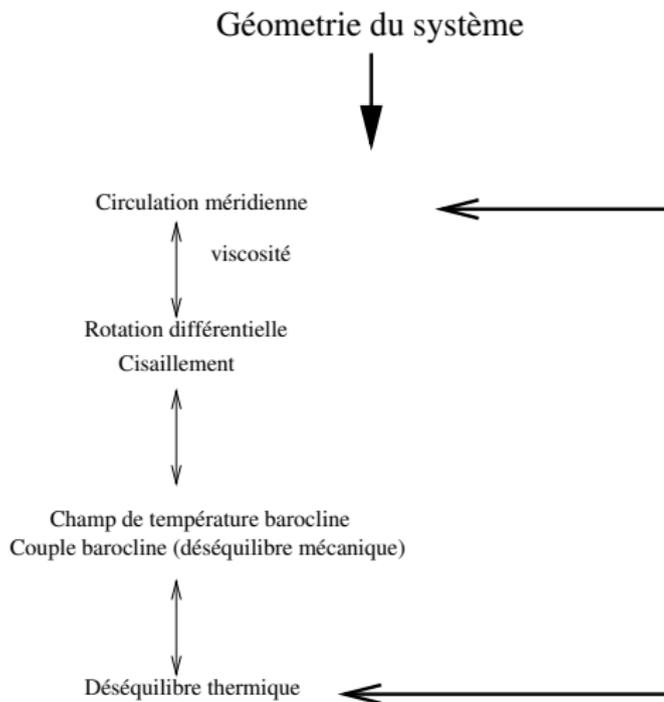
amputée du terme $\Omega^2/2\pi G\rho$ qui diverge en surface.

Cependant, JPZ précise : **Moreover, [...] a slight departure from uniform rotation will introduce terms which are even larger than the Gratton-Öpik correction.**

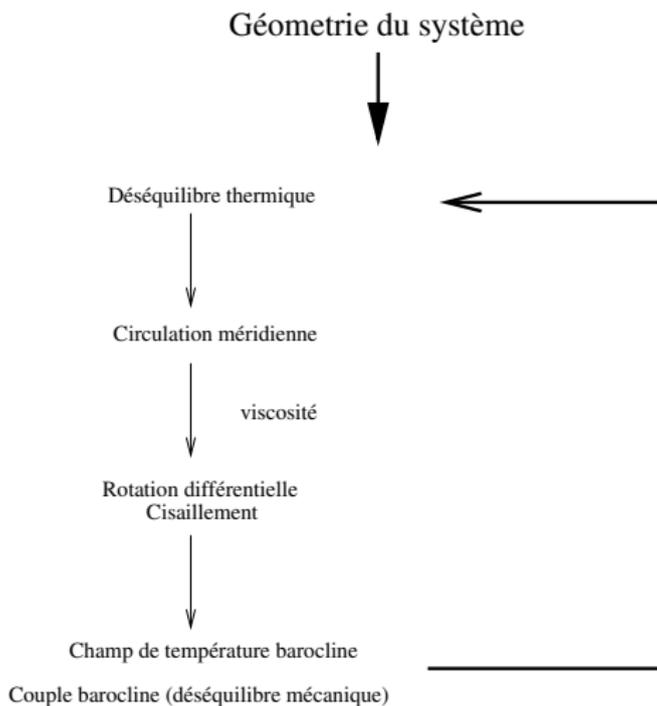
Le modèle de Zahn 1992



Mais on peut aussi « tourner » dans l'autre sens :



ou voir des causes et des effets de la façon (parfaitement équivalente) suivante :



Cependant certains auteurs oublient volontiers les deux dernières branches, en faisant le raisonnement suivant :

$$\frac{d\Omega}{dr} = 0 \implies E_{\Omega} = 2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\pi G\rho} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \frac{\tilde{g}}{g} \neq 0$$
$$\implies U(r) \neq 0$$

Est-ce grave docteur ?

oui en fait on retombe sur Sweet 1950 et ses incohérences...

Pour justifier la cuisine précédente on invoque souvent les rotateurs lents car

$$t_{ES} = \frac{t_{KH}}{\varepsilon} \gg t_{nuc}$$

Certains, comme Osaki 1982, en profite pour dire que la circulation est celle donnée par Sweet 1950 car on est dans un transient qui dure...

Mais le champ de température évolue sur t_{KH} pour satisfaire $\text{Div}(\chi \vec{\nabla} T) = 0$.

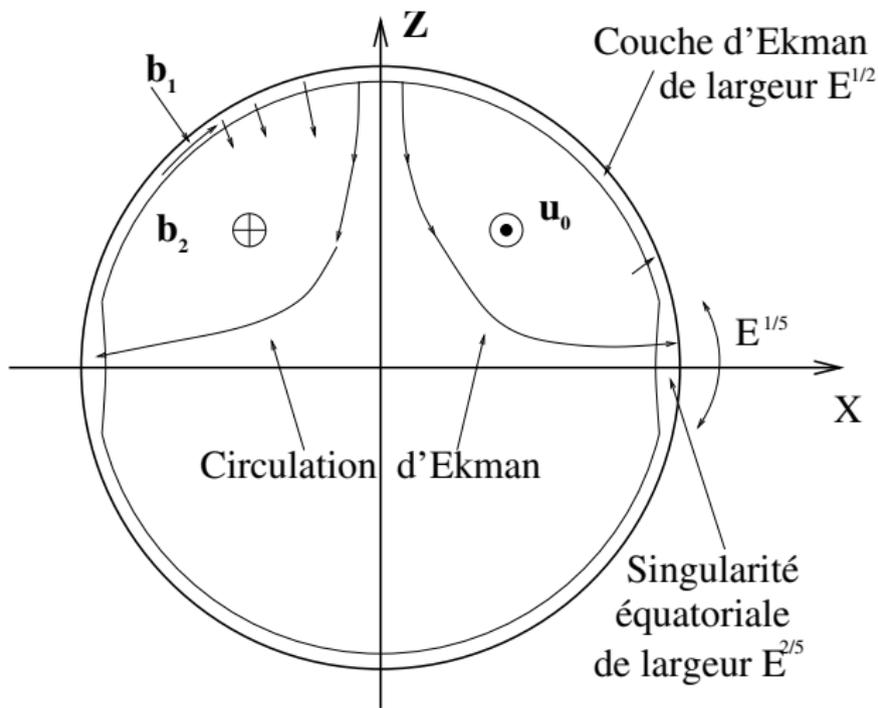
Reste les modes baroclines qui s'amortissent très lentement, qui ont une très petite circulation méridienne et qui mettent en route la rotation différentielle.

Finalement,
on voit que la circulation méridienne ainsi déduite **dépend très fortement des conditions initiales** et en particulier de la moindre rotation différentielle.

Discuter du mélange dans les rotateurs lents sans tenir compte de leur histoire est tout simplement une ineptie !

Le problème du spin-down

Un cas d'école, le spin-down d'un fluide à l'intérieur d'une sphère :



Dans ce système, le temps caractéristique est :

$$T \sim \frac{P_{\text{rot}}}{\sqrt{E}} \ll \frac{P_{\text{rot}}}{E}$$

contrôlé par la circulation d'Ekman qui transfère le moment cinétique de l'intérieur (non-visqueux) vers les couches limites et vers la paroi.

La perte de masse couplée à un champ magnétique à grande échelle permet d'extraire une quantité significative de moment cinétique d'une étoile.

Une nouvelle échelle de temps apparaît :

$$\frac{L}{\dot{L}}$$

On doit comparer cette échelle de temps à celle du transport du moment cinétique à l'intérieur de l'étoile, i.e. à t_{ES} :

$$t_{\text{ES}} < \frac{L}{\dot{L}} \quad \text{vent faible}$$

$$t_{\text{ES}} > \frac{L}{\dot{L}} \quad \text{vent fort}$$

- Un couple est appliqué à l'étoile, le temps de réaction est court et la circulation méridienne s'ajuste immédiatement ; on a

$$\frac{dL}{dt} \sim \rho R^4 \Omega U$$

- La vitesse méridienne, et donc le mélange, est contrôlé par la perte de moment cinétique.

- La circulation méridienne barocline est incapable de suppléer à la perte de moment cinétique, la rotation différentielle augmente, des couches de cisaillement (turbulente) apparaissent...
- La circulation devient de type 'pompage d'Ekman en fluide stratifié' contrôlée par une couche limite turbulente...

Un scénario pour le soleil

- Hypothèse : le soleil jeune tournait 50 fois plus vite que le soleil actuel.
- Dans ce cas $T_{ES} \sim T_{KH} \sim 16$ Myrs.
- V_r, V_θ induits par la viscosité $\nu \sim 10^{-3} \text{m}^2/\text{s}$. $T_{\text{circ}} \sim 10^{17}$ ans...
- Mais le soleil freine via le vent solaire. La zone convective transmet le couple.
- et la zone radiative subit un écoulement de spin-down sur une échelle de temps

$$T_{sd} = T_{visc} \sqrt{E} \quad \text{avec} \quad E \sim 10^{-15}$$

et donc un temps de spin-down de

$$T_{sd} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

compatible avec un cœur actuel encore en rotation rapide...

Fin !